

الرياضيات

للصف الأول المتوسط
المحزء الثاني



مملكة العربية السعودية
وزارة المعارف

المديرية العامة للأبحاث
والمناهج والمادة التعليمية



الطبعة الأولى

١٣٩٩ هـ - ١٩٧٩ م

وزارة المعارف تدرّس هذا
اب وطبعه على نفقتها

يشترع بحسبنا ولا يباع

الرياضيات

الجزء الثاني

للصف الأول المتوسط



المملكة العربية السعودية

وزارة المعارف

المديرية العامة للأبحاث والمنهج والمواد التعليمية

تم إعداد هذا الكتاب
في المركز التربوي للعلوم والرياضيات
الجامعية الأميركية في بيروت

التحرير والإشراف : الدكتور ر. أ. عيدو

لجنة التأليف :

الرئيس :	الدكتور ر. أ. عيدو
الأعضاء :	الدكتور ف. ملحم
	ل. بامبلا
	م. مرجع
	ن. الزيات

قررت وزارة المعارف تدريس هذا الكتاب وطبع على نفقتها

الرياضيات

الجزء الثاني

للصف الأول المتوسط

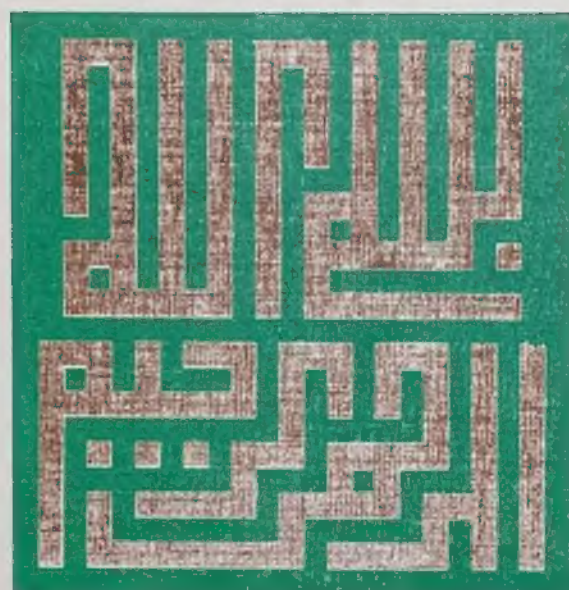
الطبعة الأولى

١٣٩٩ هـ - ١٩٧٩ م

يوزع مجاناً ولا يُباع

تعليمات

الرسوم : آ. اسعد
الاخراج الطباعي والتفصيل : الاستشارات والخدمات التربوية ش.م.م.
الطباعة : دار الكتاب اللبناني



بِعون الله تعالى تمّ تأليف كتاب الرياضيات للصف الأول المتوسط . وجاء هذا الكتاب منسجماً مع سياسة التعليم في المملكة من خلال تحقيقه لغاية هذا التعليم وأهدافه بشكل عام ، ولأهداف المرحلة المتوسطة بشكل خاص . كما جاء هذا الكتاب منسجماً مع مقررات المنهج الرسمي للرياضيات الذي اعتمدته وزارة المعارف مؤخراً .

نلاحظ أولاً أننا أطلقنا اسم «الرياضيات» على الكتاب ككل ، بدل تقسيمه كما جرت العادة سابقاً إلى أجزاء تتناول الحساب والجبر والهندسة منفصلة بعضها عن بعض ؛ ويعكس ذلك النظرة الحديثة إلى المواضيع التي يعالجها المنهج بشكل عام ، والكتاب بشكل خاص .

فانطلاقاً من لغة المجموعات يعالج الكتاب موضوعات الكم (الأعداد والجبر) ، والشكل (الهندسة) ، والقياس والهندسة التحليلية (ربط الشكل بالعدد) من خلال نظرة شاملة وموحدة للمفاهيم الرياضية .

ومن ناحية أخرى فقد شدّدنا في هذا الكتاب على العامل الفردي في عملية التعلم . ويظهر ذلك جلياً من خلال النشاطات المخصصة للتلميذ ، والتي تسبق دائماً عرض الدرس . وتهدف هذه النشاطات إلى :

مساعدة التلميذ على إتمام قدراته على الملاحظة واستخلاص النتائج .
تدريب التلميذ على إتقان الرسم الهندسي .
وضع التلميذ في موقف عملي وموقف فكري يجعلانه يتحسّس ضرورة التعاريف والقواعد الرياضية اللاحقة ، ويتفهم علاقاتها مع المفاهيم السابقة .

قسّم هذا الكتاب إلى جزءين ، وخصّص كل جزء لفصل دراسي واحد ؛ يتألف الجزء الأول ، وهو الأطول ، من سبعة فصول :

فصلان مخصّصان للمجموعات والعمليات عليها ، ويهدفان إلى تنظيم لغة الرياضيات وإلى التعامل مع الرموز .

فصل واحد حول الأعداد الكليّة، يهدف إلى التعرف على هذه الأعداد، والعمليات عليها من خلال مفهوم المجموعات .

أربعة فصول حول الهندسة الإقليدية، خصّص الفصل الأول منها للمفاهيم الهندسية الواردة في المنهج الجديد للمرحلة الابتدائية، والتي كان بعضها غائباً عن المنهج القديم . وقد أدّى هذا الفصل إلى تطويل الجزء الأول من الكتاب ، وعلى المعلم المرور على هذا القسم بسرعة ، آخذاً بعين الاعتبار تجاوب التلاميذ، ليستطيع إنجاز هذا الجزء خلال الفصل الأول من السنة الدراسية .

يتألف الجزء الثاني من سبعة فصول :

فصلان حول الأعداد .

ثلاثة فصول حول الهندسة الإقليدية .

فصل واحد حول العلاقات .

فصل واحد حول الهندسة التحليلية .

ومن ناحية أخرى فقد اعتمدنا في تأليف هذا الكتاب وإخراجه لوتين أساسيين :

اللون البني : للنشاطات والتمارين المرافقة، والمعرضة على الهامش ، وهو مخصّص لعمل التلميذ في الصف . ودور المعلم في هذا القسم هو دور المرشد والمساعد عند الحاجة .

اللون الأسود : للدروس والملاحظات المهمة المعرضة على الهامش .

وأملنا أن يساهم هذا الكتاب في إثارة فضول التلاميذ، وإثراء مهاراتهم، وتعزيز ثقتهم بأنفسهم، وبقدراتهم على التعلّم والابتكار .

والله وليّ التوفيق

رئيس لجنة المؤلفين

الدكتور رفيق أ. عيدو

فهرس

الفصل الثامن : التوازي

- ٣ تعريف مستقيمين متوازيين
- ٧ توازي المستقيمت وتعامدها
- ١٣ التوازي والتناظر حول محور
- ١٩ تطبيقات على التوازي والتعامد

الفصل التاسع : العبارات الرياضية

- ٢٣ العبارات الرياضية
- ٢٧ المعادلات في مجموعة الاعداد الكلية
- ٣٧ مسائل حسابية
- ٤٥ المتراجحات في مجموعة الأعداد الكلية

الفصل العاشر : التناظر حول نقطة

والانسحاب والمتجهات

- ٥٥ التناظر حول نقطة
- ٦٣ الانسحاب على مستقيم
- ٦٩ المتجهات

الفصل الحادي عشر : الاعداد الصحيحة

- ٧٥ ماهية الاعداد الصحيحة
- ٨٥ جمع الاعداد الصحيحة وطرحها
- ٩١ ترتيب الاعداد الصحيحة
- ٩٥ ضرب الاعداد الصحيحة وقسمتها
- ١٠١ تبسيط التراكيب العددية

الفصل الثاني عشر : الدائرة والدوران

١٠٧	الدائرة وعناصرها
١١٣	خصائص القطر في الدائرة
١١٩	الدائرة والمستقيم
١٢٣	رسم الدائرة
١٢٥	الدوران

الفصل الثالث عشر : العلاقات

١٣٣	العلاقات
١٣٧	تمثيل العلاقات

الفصل الرابع عشر : المحور والمستوى الديكارتي

ص × ص

١٤٣	المحور
١٤٩	تمثيل الأزواج المرتبة في المستوى
١٥٣	تمثيل العلاقات العددية

الفصل الثامن :

التوازي

- الدّرس الأول : تعريف مستقيمين متوازيين
- الدّرس الثاني : توازي المستقيمات وتعامدها
- الدّرس الثالث : التوازي والناظر صول محور
- الدّرس الرابع : تطبيقات على التوازي والتعامد

الدرس الأول : تعريف مستقيمين متوازيين

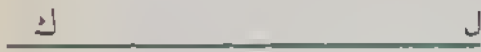
(١) توازي مستقيمين



شكل (١)

■ على الشكل (١) مستقيمان : a و b وحد τ . حدد نقطة تقاطعها وسمها .
انتسخ الشكل (٢) . مدد القطعتين المرسومين . هل يتقاطع المستقيمان a و b ؟

انتسخ الشكل (٣) . مدد القطعتين المرسومين .
هل يتقاطع المستقيمان a و b ؟



شكل (٢)

بالنسبة لمستقيمين مختلفين في مستوى واحد . نلاحظ أنهما يكونان إما متقاطعين (كما على الشكلين (١) و (٢)) ، وإما غير متقاطعين (كما على الشكل (٣)) .

في الحالة الأخيرة نقول : إن المستقيمين متوازيان .
حَقَقْ



شكل (٣)

يقال عن مستقيمين a و b $a \parallel b$ أنهما متوازيان عندما لا يلتقيان أبداً . ونكتب رمزياً : $a \parallel b$

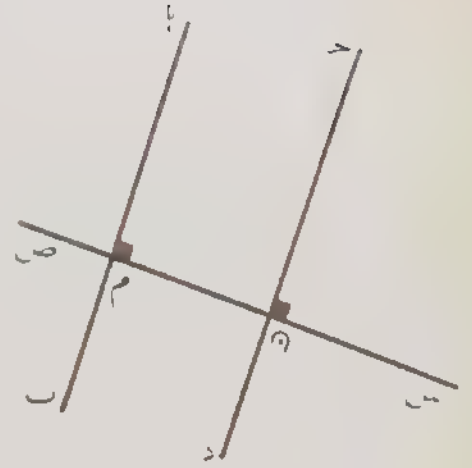
$a \parallel b$
يكافئه

$a \cap b = \emptyset$

■ دلّ على مستقيمتين متوازيتين في غرفة الصف .

(٢) توازي عمودين على مستقيم واحد

■ انتسخ من جديد الشكل (٣). جد طيًا يجعل جزءاً من كل مستقيم يطابق جزءه الآخر. ارسم خط الطي. ماذا تقول عن خط الطي بالنسبة لكل من AB و CD ؟



شكل (٤)

■ على الشكل (٤) $AB \perp CD$ و $CD \perp EF$. انتسخ الرسم ومدد AB و CD قدر المستطاع. ماذا تلاحظ بالنسبة لالتقاءهما؟

لنفترض أن $AB \cap CD = \{J\}$.

هل يمكن أن يمر عمودان على CD في نقطة واحدة؟ لماذا؟

هل افتراضنا صحيح؟ كيف هما المستقيمان AB و CD ؟

لاحظت في القسم الأول من نشاطك السابق أنه عندما يكون مستقيمان متوازيين فهما عموديان على مستقيم واحد. وأثبت في القسم الثاني من النشاط أن $AB \parallel CD$.

إذا كان :

$AB \perp CD$

$CD \perp EF$

$AB \neq EF$

فإن :

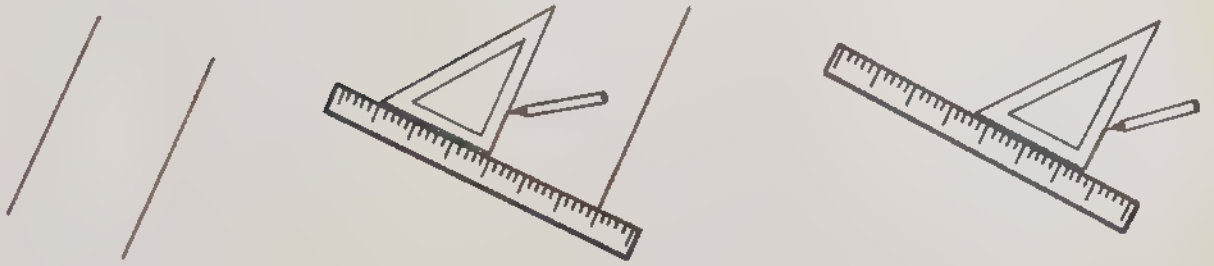
$AB \parallel EF$

كل عمودين على مستقيم واحد هما متوازيان.

۳) إنشاء مستقیمین متوازیین

کي ننشی مستقیمین متوازیین یکفې اُن ننشی عمودین علی مستقیم واحد.

■ قم ستاح متناہ لاساط اسی لرسم مستقیمین متوازیین.



شکل (۵)

تمارين

(١) رسم مستقيمين متوازيين ككرر عمل عدة مرات

(٢) ارسم مستقيمين من ص. ثم ارسم ثلاثة مستقيمت مارة

٥

(٣) استعمل المسطرة ومثلث الرسم كي تتحقق من تداري

مستقيمين على شكل (٣) من هـ الرسم

٤ ٢٢ رتبع في اسك ا ب حـ . ارسم ا ق بحيث :

٢ ق ا ب دـ . مد نقول عن ا ق و ب جـ ؟

٧١ د ل

(٥) ا ب حـ مثلث متطابق الأضلاع . ارسم استقيمت

اموربة للأضلاع ؛ ولتي تمر في رؤوس المثلث . استخدم

المسطرة كي تفارن أضلاع قطع المستقيمت على الرسم . ماذا

تلاحظ ؟



الدليل الثاني : توازي المستقيمت وتعامدها

(١) مصادرة إقليدس

■ س ص مستقيم. \angle س ص.

ارسم العمود على س ص والمار في \angle ، وسمه \angle ك.

ارسم العمود على \angle ك والمار في \angle ، وسمه \angle ل.

هل \angle ل و س ص متوازيان؟ لماذا؟

■ ارسم عمودًا على س ص. وسمه ع ط.

ارسم العمود على ع ط المار في \angle ، وسمه \angle م.

هل \angle م و س ص متوازيان؟ لماذا؟ ماذا تلاحظ بالنسبة ل \angle م و \angle ل؟

■ ارسم مستقيماً، ثم عيّن نقطة غير منتمية إليه. كم مستقيماً موازياً لهذا

المستقيم. ويمر في هذه النقطة. تستطيع أن ترسم؟

لاحظت فيما سبق خاصية أساسية للمستقيمت المتوازية تعرف باسم

مصادرة إقليدس وهي: حفظاً

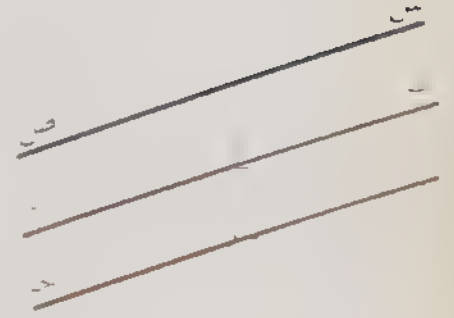
من نقطة غير منتمية الى مستقيم معطى نستطيع إنشاء مستقيم واحد فقط موازٍ لهذا المستقيم المعطى.

إقليدس هو العالم اليوناني الذي وضع البناء الأساسي لعلم الهندسة الذي نتعلمه. وقد سمي بالهندسة الاقليدية نسبة لهذا العالم.

مصادرة هي الترجمة العربية لكلمة POSTULATE. وتعني نتيجة الملاحظة. ويقبل بها طالب العلم دون برهان رياضي، لأنه انطلاقاً منها تبرهن النتائج، ولا يمكن ان تُبرهن هي بما سبقها.

(٢) المستقيمتان المتوازيتان

■ على الشكل (٢) $س ص$ مستقيم. $أ ب // س ص$ و $ج د // س ص$.
 $أ ب \neq ج د$.



شكل (٢)

~~ص~~

لنفترض أن $أ ب \cap ج د = \{ م \}$.
 هل نستطيع من النقطة م إنشاء مستقيمين موازيين لـ $س ص$ ؟ لماذا؟ هل
 افترضنا السابق صحيح؟ كيف هما المستقيمان $أ ب$ و $ج د$ ؟

أثبت في النشاط السابق النتيجة التالية:

كل مستقيمين مختلفين موازيين لمستقيم ثالث هما متوازيان

إذا كان .

$أ ب // س ص$

$ج د // س ص$

$أ ب \neq ج د$

فإن :

$أ ب // ج د$

(٣) المستقيمتان المتوازيتان والقواطع

تقول عن مستقيم إنه قاطع لمستقيم آخر إذا التقاه في نقطة واحدة.
 على الشكل (٣) $أ ب$ و $ج د$ مستقيمان متوازيان. $س ص$ هو قاطع
 لـ $أ ب$ ، و $س ص \cap أ ب = \{ م \}$.

سنثبت أن $س ص$ هو قاطع لـ $ج د$.
 يأخذ $س ص$ بالنسبة لـ $ج د$ أحد الأوضاع التالية :

(١) $س ص$ هو موازٍ لـ $ج د$

(٢) $س ص = ج د$

(٣) $س ص$ هو قاطع لـ $ج د$



شكل (٣)

■ لو كان $س ص // ج د$ فكم هو عدد المستقيمتان المتوازيتان لـ $ج د$ ، والمارة

٥. هل هذا ممكن؟
هل الوضع رقم ١ صحيح؟

■ لو كان س ص جـد فكيف يكون جـد بالنسبة لـ ب؟ هل هذا ممكن؟ هل الوضع رقم ٢ صحيح.
■ ما هي استنتاجاتك؟

أثبت فيما سبق أن س ص هو قاطع لـ جـد. وبالتالي:

إذا كان مستقيمان متوازيين. فإن كل قاطع لأحدهما هو قاطع للآخر أيضًا.

٤) العمود على مستقيمتين متوازيتين

على الشكل (٤): ب، جـد، كل ثلاثة مستقيمتين متوازيتين.
س ص \perp ب.

■ أثبت أن س ص هو قاطع لـ جـد و لـ ب.

تحقق من أن س ص عمودي على جـد و لـ ب.

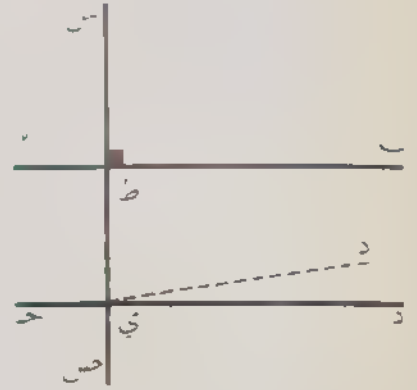
ارسم مستقيمتين أخرى موازيتين لـ ب، وتحقق من أنها عمودية على س ص.

ارسم مستقيمتين عموديتين على جـد، ثم تحقق من أنه عمودي أيضًا على ب و لـ ب.



لاحظت في السطر السابق ما يلي

كل عمود على مستقيم معطى هو عمود على جميع المستقيمت
الموازية للمستقيم المعطى.



شكل (٥)

- على الشكل (٥): $أب \perp ح د$. $س ص \perp أب$.
 أعطِ الحجج التي تبرر الخطوات التالية لكي تثبت أن:
 $س ص \perp ج د$. وبالتالي ان القاعدة السابقة هي صحيحة.
 (١) $س ص$ هو قاطع لـ $ج د$. سمّ ي نقطة التقاطع.
 (٢) إذا لم يكن $س ص \perp ج د$ فإن هناك مستقيماً آخرى $د'$ عمودياً على
 $س ص$. ويمر في ي (ي $د' \neq د$).
 (٣) ي $د' // أب$.
 (٤) الافتراض في الخطوة رقم ٢ هو افتراض خاطئ.
 (٥) $س ص \perp ي د$.

تمارين :

(١) P و B نقطتان من المستقيم $س.ص.$ P ك و B ل عمودان على $س.ص.$ $م$ نقطة خارج $س.ص.$

أ - أنشئ $م$ ج \perp $ل.ك.$ و $م$ د \perp $ب.ل.$

ب - ماذا تلاحظ بالنسبة لنقاط : $م.ح.د$ أثبت هذه الملاحظة ؟

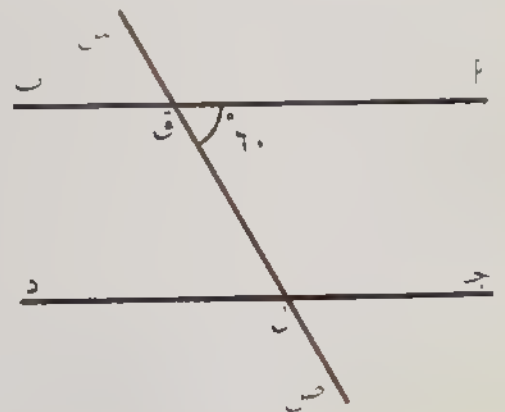
(٢) $[س.ص. م. ح]$ قطاع راوي بحيث إن : $\widehat{س.ح.م} > 90^\circ$

أ - رُقِّم نصف المستقيم $[س.ح.]$ ثم أنشئ من أطراف القطع مستقيمت عمودية على $س.ح.$

ب - أثبت أن المستقيمت التي أنشأتها هي متوازية.

ج - تحقق بواسطة القياس من أن القطع المحددة على $س.ح.$ لهذه المستقيمت المتوازية هي متطابقة.

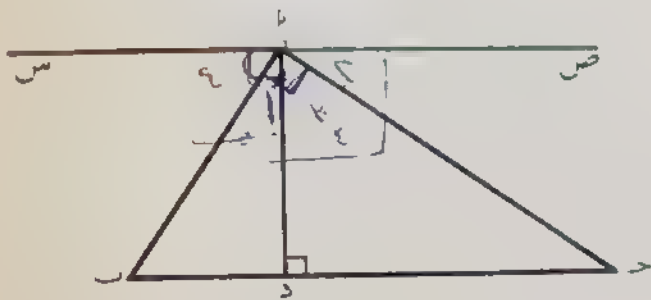
(٣) على الرسم التالي : P ب ، ج د ، و $س.ص.$ ثلاثة



مستقيمت ، بحيث إن : P ب // ج د ؛ $س.ص. م$ \cap P ب = $\{ق\}$ ؛ $س.ص. ن$ \cap ج د = $\{ل\}$ و $\widehat{ق.ل} = 60^\circ$

استعمل المقلة كي تقيس روايا القطاعات التي رأسها ق ، و روايا القطاعات التي رأسها ل . ماذا تلاحظ ؟

(٤) في المثلث P ب ج : $P - 90^\circ$ و P د هو ارتفاع أنشأنا P ص // د ج .



أ - أثبت أن : P ب \perp د ج و P ص .

ب - ليكن P س \perp د ج . أثبت أن :

P س - P د ج .

ج - أثبت بطريقتين مختلفتين أن النقاط : $س.م.ب.$

ص هي على استقامة واحدة .

البرهان - $س.م.ب. // ص.د.ج.$

$س.م.ب. \perp ص.د.ج.$

$\therefore \widehat{س.م.ب.} = 90^\circ$

$90^\circ = 2 + 3$

$90^\circ = 1 + 2$ فرضاً

$\therefore 1 = 3$

الدرس الثالث : التوازي والتناظر حول محور

(١) الأعمدة على المستقيمت المتوازية

في الشكل (١)، AB ، CD ، E ، ... مستقيمت متوازية
 $SV \perp AB$.



شكل (١)

■ هل $SV \perp CD$ ؟ هل $SV \perp E$ ؟ ... لماذا؟
 في التناظر حول SV : ما هو نظير كل من المستقيمت AB ، CD ،
 E ، ...؟

انتسخ الرسم واطور الورقة حول SV . ماذا تلاحظ بالنسبة لمطابقة
 المستقيمت؟

■ ارسم عمودًا على CD ، وسمّه DE .

هل DE عمودي على المستقيمت الأخرى في الرسم؟

هل DE هو محور تناظر للمستقيمت المتوازية : AB ، CD ،
 E ، ...؟

■ جد محاور تناظر أخرى للمستقيمت AB ، CD ، E ، ...

نستنتج من النشاط السابق ما يلي :

كل عمود على مستقيم هو محور تناظر لهذا المستقيم ولكل
 مستقيم موازي له.

٢) المستقيم المتوسط بين متوازيين

- ارسم على ورقة مستقيمين متوازيين AB و CD .
اطوِ الورقة كي تطابق AB و CD .
افتح الورقة ثم ارسم خط الطي، وسمه EF .

لقد حصلت على رسم مشابه للشكل (٢).

EF هو محور تناظر للشكل المؤلف من المستقيمين المتوازيين AB و CD ، ويسمى المستقيم المتوسط بينهما.

شكل (٢)

المستقيم المتوسط بين متوازيين هو محور التناظر الذي يحول كل مستقيم منها إلى الآخر.

٣) خصائص المستقيم المتوسط

- ارسم مستقيمين متوازيين AB و CD ، ثم استخدم الطي كي ترسم المستقيم المتوسط بينهما، وسمه EF .
- جد طياً يجعل جزءاً من كل من المستقيمين AB و CD يطابق جزءه الآخر. ماذا تلاحظ بالنسبة لـ EF ؟
كيف هي المستقيمتان AB ، CD ، EF ؟
لاحظت في النشاط السابق ما يلي:

المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين هو موازٍ لهما

■ أجب عن الأسئلة التالية لتثبت أن المستقيم المتوسط $س ص$ بين مستقيمين متوازيين $أ ب$ و $ج د$ هو مواز لهما :

(١) افترض أن : $س ص \cap أ ب = م$ { ما هو نظير $م$ بالتناظر حول $س ص$ ؟

أثبت في هذه الحالة أن : $م \in ج د$ ، وبالتالي أن :
 $أ ب \cap ج د = م$ { هل استنتاجك الأخير ممكن ؟
 (٢) استنتج أن $س ص \parallel أ ب$

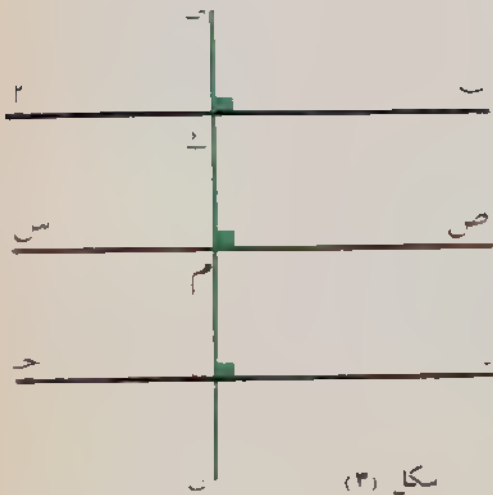
على الشكل (٣) : $س ص$ هو المستقيم المتوسط بين المستقيمين المتوازيين :
 $أ ب$ و $ج د$ ، $م \in س ص$ ، $ط$ هي العمود المشترك على $أ ب$ ، $ج د$ ،
 $س ص$ والمار في $م$.

■ ما هو نظير $ك$ بالتناظر حول $س ص$ ؟

ما العلاقة بين $ام ك$ و $ام ل$ ؟
 ■ ما هي استنتاجاتك ؟

أثبت في النشاط السابق ما يلي :

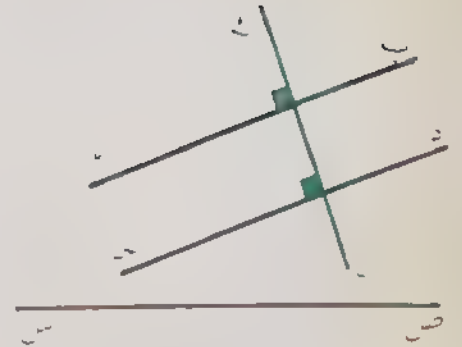
كل نقطة من المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين تبعد
 البعد نفسه عن هذين المستقيمين .



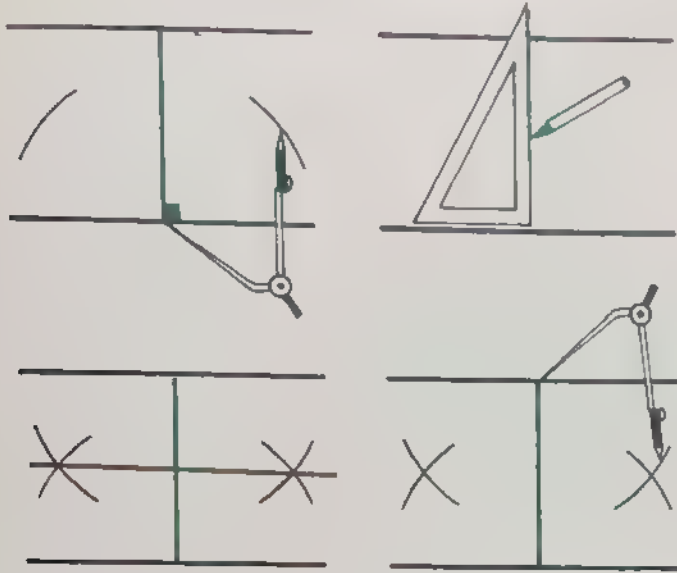
شكل (٣)

(٤) رسم المستقيم المتوسط بين متوازيين

■ قم بنشاط مشابه للنشاط الثاني لرسم المستقيم المتوسط بين متوازيين .



شكل (٤)



(٥) التناظر حول محور والتوازي

على الشكل (٤): $AB \parallel CD$ ؛ لكل عمود مشترك على AB و CD .

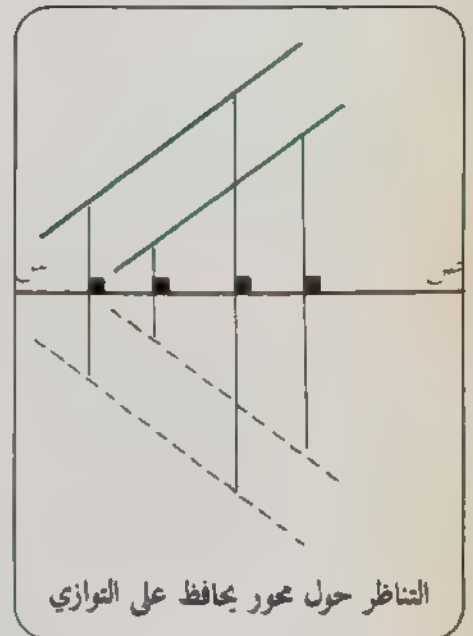
■ ارسم: AB ، CD ، لكل صور AB ، CD ، لكل بالتناظر حول SS .

هل $AB \perp SS$ ؛ $CD \perp SS$ ؟ لماذا؟

ماذا تستنتج بالنسبة لـ AB ، CD ؟ هل هما متوازيان؟

لقد اثبت في النشاط السابق ما يلي:

التناظر حول محور يحافظ على التوازي .



التناظر حول محور يحافظ على التوازي

تمارين :

(١) [أب] قطعة مستقيم .

أس \perp أب ، ب ص \perp أب .

كل هو العمود المنصف لـ [أب] .

أ - أثبت أن : كل موار لـ أس وب ص .

ب - أثبت أن : كل هو المستقيم المتوسط بين أس وب ص .

ج - ارسم مستقيماً عمودياً على أس ، ب ص ،

كل . ثم سمّ : م ، ن . هـ نقاط التقاطع . قارن

امها وامنا .

(٢) أب جـ مثلث . م و ن منتصفا [أب]

و [أجـ] . س ص هو المستقيم المارّ في م ، والموازي لـ ب جـ

أ - ارسم المستقيم المتوسط بين س ص وب جـ

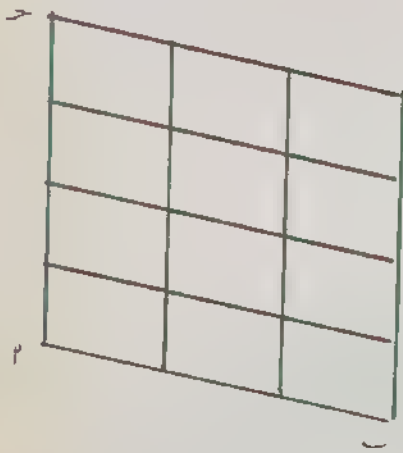
ب - استعمل القياس كي تجد نقطتين مُميزتين على هذا المستقيم .

الدرس الرابع : تطبيقات على التوازي والتعامد

(١) إنشاء شبكات تربيع

على الشكل (١) رسمنا أولاً $[أب]$ بحيث $|أب| = ٤,٥$ سم. و $أج$ بحيث $|أج| = ٤$ سم. ثم قسّمنا $[أب]$ إلى ثلاث قطع متطابقة، طول كل منها $١,٥$ سم، وقسّمنا $[أج]$ إلى أربع قطع متطابقة طول كل منها ١ سم.

من أطراف القطع على $[أب]$ رسمنا مستقيمت موازية لـ $أج$ ، ومن أطراف القطع على $[أج]$ رسمنا مستقيمت موازية لـ $أب$ ، فحصلنا على ما يسمى شبكة تربيع.



شكل (١)

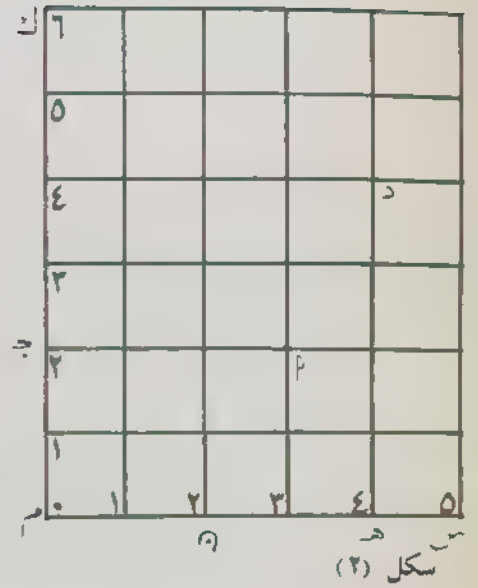
■ ارسم مستقيمين متعامدين: $س ص$ ، $ك ل$ ؛ حيث $س ص \perp ك ل = \{م\}$.

قسّم نصف المستقيم $[م س]$ بقطع متطابقة متتالية، طول كل منها ما تشاء (١ سم مثلاً)، ثم ارسم من نقاط التقسيم مستقيمت موازية لـ $ك ل$. قسّم $[م ك]$ بقطع متطابقة متتالية، طول كل منها مساو لطول القطعة على $[م س]$ ، ثم ارسم من نقاط التقسيم مستقيمت موازية لـ $س ص$.

لقد حصلت على رسم مشابه للشكل (٢) يسمى «شبكة تربيع عمودية نظيية».

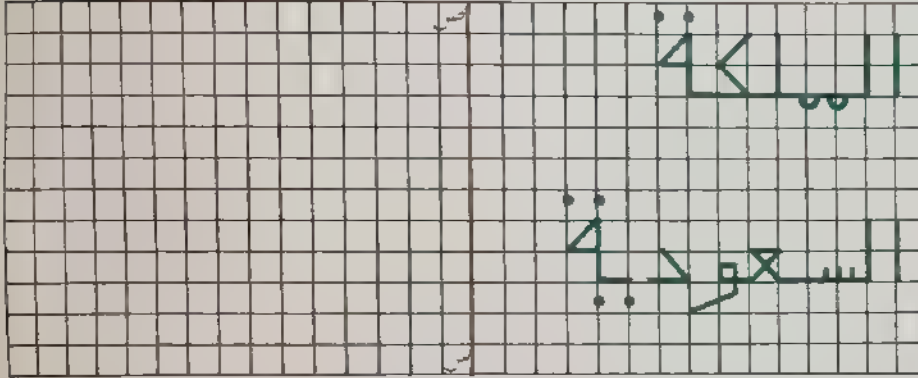
٢) تعيين النقاط على شبكة تربيع

نقاط تقاطع المتوازيات على شبكة تربيع تسمى عُقَدًا أو نقاط الشبكة. كل نقطة من شبكة تربيع تحدد بالمستقيمين اللذين يلتقيان فيها. النقطة P مثلاً تنتمي إلى المستقيم البني رقم ٣، وإلى المستقيم الأخضر رقم ٢، ونرمز اليها بالزوج المرتب: $(٢, ٣)$. على أن يكون الحد الأول رقم المستقيم العمودي، والحد الثاني رقم المستقيم الأفقي. رمز H هو $(٠, ٤)$ ، ورمز J هو $(٢, ٠)$. أما رمز M فهو $(٠, ٠)$.



٣) رسم الشكل النظير على شبكة تربيع

■ سر ص هو محور التناظر. ارسم نظير الشكل ادناه مستعيناً بشبكة التربيع.



* على الشبكة أعلاه: ما رمز D ؟

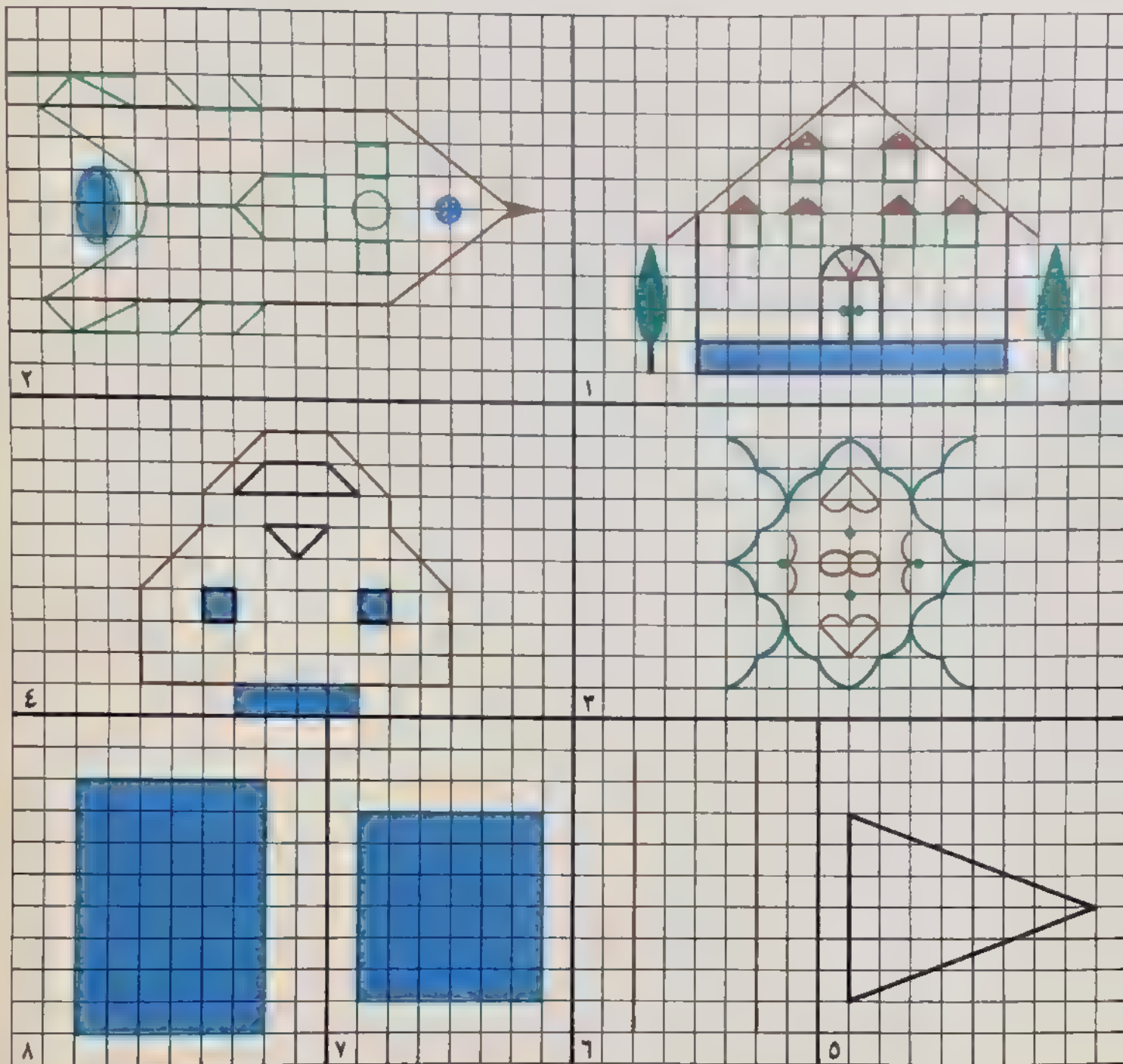
* مثل النقاط التي رموزها:

$و = (٢, ١)$. $ط = (١, ٢)$

$ي = (٥, ٣)$. $ع = (٤, ٠)$

تحديد محاور التناظر

حدد محاور التناظر في الأشكال التالية مستخدماً المسطرة والمسطرة المنحنية



الفصل التاسع :

العبارات الرياضية

الدرس الاول : العبارات الرياضية

الدرس الثاني : اعدادات في مجموعة الاعداد الكلية

الدرس الثالث : مسائل صعبة

الدرس الرابع : نتائج في مجموعة الاعداد الكلية

الدرس الأول : التعبيرات الرياضية

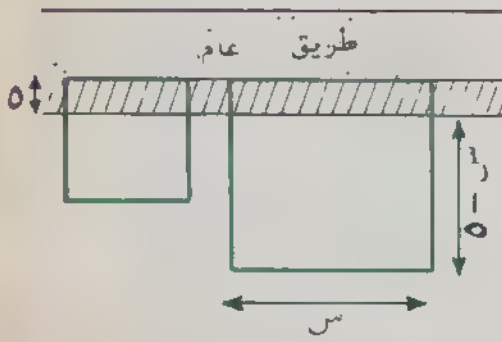
(١) التعبيرات الرياضية

▲ مثال ١ : إذا رمزنا بالحرف p إلى رقم أحاد عدد مؤلف من ثلاثة أرقام ، وبالحرف e إلى رقم عشرات ، وبالحرف m إلى رقم مئاته لاستطعنا كتابة العدد على الشكل :

$$p + 10e + 100m.$$

وإذا حذفنا إشارة الضرب لتسهيل الكتابة ، واستعملنا الرمز s ص كرمز لـ $s \times$ ص لكتبنا العدد السابق على الشكل :

$$p + 10e + 100m.$$



شكل (١)

▲ مثال ٢ : الشكل (١) يمثل قطع أرض مربعة الشكل . تقع على محاذة الطريق العام.

عند توسيع الطريق فقد كل مالك جزءاً من قطعتة عرضه ٥ أمتار . لو رمزنا بالحرف s لطول ضلع إحدى القطع المربعة ، لأصبحت أبعاد القطعة بعد توسيع الطريق : s و $s - 5$ ، ولأصبحت مساحتها :

$$s(s-5) = s \times s - s \times 5$$

أو $s^2 - 5s$

$p + 10e + 100m$ في المثال الأول
و $s^2 - 5s$ في المثال الثاني هي عبارات رياضية.

كذلك ٥ ب ٢ هي عبارة رياضية تمثل حاصل ضرب العدد ٥ بالعدد ٢ بمربع العدد ب .

٢) القيم العددية للعبارة الرياضية

إذا كان رقم آحاد العدد في المثال ١ من الفقرة السابقة هو ٥ ، ورقم عشراته ٣ ، ورقم مئاته ٧ ، لأصبح لدينا :

$$٧٣٥ = ١٠٠ \times ٧ + ١٠ \times ٣ + ٥ - م + ١٠ + ع$$

العدد ٧٣٥ هو القيمة العددية للعبارة الرياضية : $١٠٠ + ع + ١٠ + م$.
عندما تكون قيم المتغيرات : $٥ = م ، ٣ = ع ، ٧ = م$.

كذلك إذا كان بعد إحدى القطع المربعة في المثال ٢ يساوي ٦٠ ، لكنت مساحة الأرض بعد توسيع الطريق :

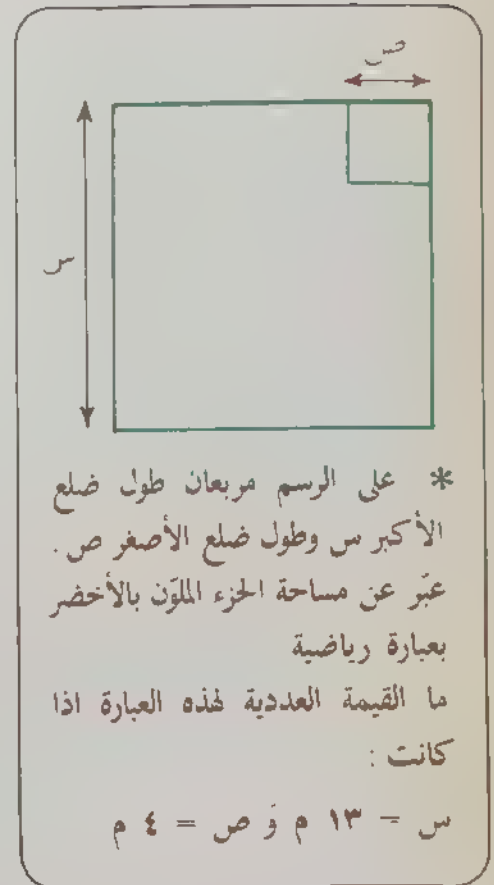
$$٣٣٠٠ = ٥ - س = ٦٠ \times ٥ - ٢(٦٠) = م$$

٣٣٠٠ هي القيمة العددية للعبارة الرياضية $٥ - س$ عندما تكون قيمة المتغير : $س = ٦٠$.

٣) العبارات الرياضية والرموز

■ كيف تكتب العبارة الرياضية التي تمثل مساحة قطع الأرض في المثال ٢ من هذا الدرس لو رمزنا بالرمز ٢ إلى طول ضلع المربع .
ما هي القيمة العددية لهذه العبارة إذا كانت $٢ = ٦٠$ ؟ قارن الجواب بالجواب الذي حصلنا عليه في الفقرة السابقة .
ما رأيك بالحملتين :

$$٥ - س \quad \text{و} \quad ٥ - ٢$$



من جهة أخرى، نلاحظ أن العبارات الرياضية التي تحتوي على رموز متغيرة، يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة، وذلك اعتماداً على القيم التي نعطى لها. فمثلاً، العبارة $x + 2 = 5$ هي صحيحة إذا كان $x = 3$ ، ولكنها خاطئة إذا كان $x = 4$. وبالمثل، العبارة $x^2 = 4$ هي صحيحة إذا كان $x = 2$ أو $x = -2$ ، ولكنها خاطئة إذا كان $x = 3$.

لاحظت في النشاط السابق أن الجملتين:

$s^2 - 5s + 6 = 0$ و $s^2 - 7s + 10 = 0$ من جهة، وأن الجملتين:

$7 - 2b$ و $7 - s$ من جهة أخرى تمثلان العبارة الرياضية نفسها، وأن القيمة العددية لهذه العبارة هي نفسها، أي كانت رموز المتغيرات في العبارة، وبالتالي:

* ما هي فيما يلي، العبارات الرياضية التي تدلّت رموز متغيراتها برموز أخرى

$s - s = s^2 - s^2$

$4 - 2b + 3 = 2b$

$b - 2b = 3b$

$5 - 4 = 2 - 5$

$3 - s + 4 = s^2 - s^2$

$m - 4m = m^2 - m^2$

إن مضمون العبارات الرياضية لا يتغير إذا بدلنا رموز المتغيرات برموز أخرى.

تمارين :

(١) جد القيمة العددية للعبارة الرياضية :

$$٤ \text{ ب}^٢ + ٣ \text{ ب} + (٢) \text{ ب}^٢$$

في كل من الحالات التالية :

$$٢ = ٢ - ٢ \text{ ب} - ١ - ١ \text{ ب} - ٣$$

$$٢ = ٢ - ٢ \text{ ب} - ١ - ١ \text{ ب} - ٣$$

(٢) إذا كان $س = ٢$ و $ص = ٥$ احسب قيمة كل من

العبارات التالية :

$$١ - ٣ \text{ س} - ٢ \text{ ص}$$

$$\text{ب} \quad \text{س ص} \quad \text{س ص} \quad \text{س ص}$$

$$\text{ج} - \text{س ص} - (\text{س} + \text{ص})$$

$$\text{د} - \text{س}^٢ + \text{ص}^٢$$

$$\text{هـ} - ٤ (٣ \text{ س} - \text{ص}) - ٣ (\text{ص} - ٢ \text{ س})$$

$$\text{و} - (\text{س}^٢ - ٣ \text{ ص}) + (\text{ص}^٢ - \text{س}^٢)$$

$$\text{ز} - \text{س} (\text{ص} + \text{س}) + \text{ص} (\text{س} + \text{ص})$$

(٣) جد القيم العددية للعبارة ٢٢ إذا كان :

$$\{ ٥ . ٤ . ٣ . ٢ . ١ . ٠ \} \ni ٢$$

(٤)

أ كيف تعبّر عن عدد زوجي ٢ ؟

ب- عبّر عن العدد الذي يلي ٢ مباشرة، وعن العدد الذي يسبقه مباشرة.

ج- عبّر عن العدد الفردي الذي يلي ٢ مباشرة.

وعن العدد الزوجي الذي يسبق ٢ مباشرة.

(٥) ب يمثل عددًا كليًا. متى يكون العدد $١ + ب$ زوجيًا؟ ومتى يكون فرديًا؟

(٦)

أ اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن :

حاصل ضرب عددين أضيف إليه مجموع هذين العددين.

ب- اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن :

حاصل ضرب مجموع عددين بالفرق بينهما؟

(٧) إذا كان $س$ عددًا كليًا فعبّر كل من العبارات الرياضية التالية :

$$\text{أ} - \text{س} (\text{س} + ١) (\text{س} + ٢) (\text{س} + ٣)$$

$$\text{ب} - \text{س}^٢ (\text{س} + ١)$$

$$\text{ج} - \text{س} + \text{س}^٢ + \text{س}^٣ + \text{س}^٤$$

$$\text{د} - \text{س}^٢ + \text{س}^٢ (\text{س} + ١) + \text{س}^٢ (\text{س} - ١)$$

(٨) ط و ع يمثلان طول مستطيل وعرضه.

أ - اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن محيط المستطيل.

ب- اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن مساحة المستطيل.

التمرين الثاني : المعادلات في مجموعة الأعداد الكلية

١) المعادلات ذات المجهول الواحد

▲ مثال ١ : s هو متغير في مجموعة الأعداد :

$P = \{2, 3, 4, 7, 9, 15\}$ ، و $2s + 5 = 13$ هي جملة يمكن أن تكون صحيحة إذا عوضنا عن s بإحدى القيم التي تأخذها في المجموعة P .

■ املاً الجدول التالي ، وعين القيم التي إذا اخذتها s في P تحققت المساواة :

$$2s + 5 = 13$$

s	٢	٣	٤	٧	٩	١٥
$2s$						
$2s + 5$						

لاحظت أن المساواة ($2s + 5 = 13$) تتحقق إذا عوضنا عن s بالعدد ٤ فقط من المجموعة P .

المجموعة P تسمى مجموعة التعويض.

$2s + 5 = 13$ تسمى معادلة ذات مجهول واحد s في مجموعة التعويض P .

المجموعة الجزئية ج - $\{4\} \subset P$ ، والتي عنصرها هو العدد ٤ الذي يحقق المساواة، تسمى مجموعة الحل في مجموعة التعويض P .

العدد ٤ هو حل للمعادلة.

▲ مثال ٢: ص هو متغير في المجموعة: ب = $\{2, 3, 5, 8, 9\}$.

■ املاً الجدول التالي وعيّن القيم التي إذا أخذها ص في ب تحققت المساواة:

$$7\text{ص} = 10 - \text{ص}^2$$

ص	٢	٣	٥	٨	٩
٧ص					
٧ص - ١٠					
ص ^٢					

لاحظت أن المساواة $(7\text{ص} = 10 - \text{ص}^2)$ تتحقق إذا عوضنا عن ص بأحد العددين (٢ أو ٥) من المجموعة ب.

$7\text{ص} - 10 = \text{ص}^2$ هي معادلة ذات مجهول واحد.

ب = $\{2, 3, 5, 8, 9\}$ هي مجموعة التعويض.

ج = $\{2, 5\} \subset B$ هي مجموعة الحل.

العدد ٢ هو حل للمعادلة. العدد ٥ هو أيضاً حلّ للمعادلة.

▲ مثال ٣ : المعادلة ذات المجهول الواحد هي :

$$س + ١ = ٧$$

بمجموعة لتعويض هي : ع { ٥ ، ٣ ، ٢ }

■ املاً الجدول التالي للحصول على حلول المعادلة :

			س
			س + ١

* جد مجموعة حل المعادلة :

$$(س + ١) = ٧ \Rightarrow س + ١ = ٧$$

في مجموعة التعويض :

$$ت = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$$

ماداً تلاحظ ؟

لاحظت أن أيّاً من الأعداد : ٢ ، ٣ ، ٥ ليس حلاً للمعادلة $س + ١ = ٧$ في مجموعة التعويض ع .

بمجموعة الحل هي إذن المجموعة الخالية \emptyset .

نقول في هذه الحال إن المعادلة $(س + ١ = ٧)$ هي مستحيلة الحل في

بمجموعة التعويض { ٢ ، ٣ ، ٥ } .

ملاحظة : إذا غيرنا في المثال ٣ مجموعة التعويض لتصبح :

$$\{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ \}$$

نجد أن العدد ٦ من مجموعة التعويض الجديدة هو حل للمعادلة

$$(س + ١ = ٧) .$$

من هنا أهمية تحديد مجموعة التعويض بالنسبة لمعادلة معطاة .

(٢) خصائص علاقة التساوي في ك

■ جد حلول المعادلة :

$$س^٢ + ٢ - ٣س = ٠$$

في مجموعة التعويض: { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

■ هل يمكنك القيام بعمل مشابه بالنسبة للمعادلة نفسها إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الكلية \mathbb{N} ؟ لماذا؟

لاحظت في النشاط السابق عدم تمكنك من تحديد حلول المعادلة $(س^2 + ٢ - ٣س = ٠)$ في \mathbb{N} بطريقة التجربة المعتمدة في الأمثلة السابقة، وذلك راجع إلى أن المجموعة \mathbb{N} هي مجموعة غير منتهية، وليس باستطاعتك تجربة جميع عناصرها لمعرفة الحلول منها.

من هنا ضرورة دراسة خصائص علاقة التساوي في \mathbb{N} لتحويل معادلات معطاة إلى معادلات مكافئة لها الحلول نفسها، وتمكننا من إيجاد الحلول دون الاعتماد على الطريقة المعتمدة في الأمثلة السابقة.

المساواة والجمع والطرح: المساواة $٢ = ب$ تقرأ (ألف يساوي باء) وتعني أن ٢ و $ب$ رمزان للعدد نفسه. ٢ يمثل الطرف الأيمن من المساواة، ونسميه الطرف الأول، و $ب$ يمثل الطرف الأيسر ونسميه الطرف الثاني.

العدد $١ + ٢$ هو العدد الذي يلي ٢ مباشرة، والعدد $ب + ١$ هو العدد الذي يلي $ب$ مباشرة. وبما أن ٢ و $ب$ يرمزان للعدد نفسه، فإن:

$$١ + ٢ = ١ + ب$$

كذلك يمكننا إضافة العدد واحد إلى طرفي المساواة الجديدة، فنحصل على:

$$١ + (١ + ب) = ١ + (١ + ٢) \\ \text{أو} \quad ٢ + ب = ٢ + ٢$$

ولو كررنا العملية السابقة ج مرة حصلنا على:

$$P + ج - ب - ج$$

ولو طرحنا من المساواة الأخيرة العدد واحد، وكررنا ذلك ج مرة، لعدنا من جديد إلى المساواة: $P = ب$ ، وبالتالي نستنتج:

* لماذا إذا كان: $ب = ج$ فإن $ب = ج$ تكافئ:

إذا كان: $ب = ج$ فإن $ب = ج$ تكافئ: $ب = ج + ج - ج$

* كيف تتقل من:

$$\begin{aligned} ٣ \text{ س} + ٧ &= ٢٢ \\ ٣ \text{ س} + ١٠ &= ٢٥ \\ ٣ \text{ س} &= ١٥ \end{aligned}$$

وهذا معناه أننا نحصل على المساواة الثانية إذا أضفنا إلى طرفي المساواة الأولى العدد ج. كما نحصل على المساواة الأولى إذا طرحنا من طرفي المساواة الثانية العدد ج.

المساواة والضرب والقسمة: سنثبت الآتي:

$$ب = ج \text{ تكافئ } ج = ب \text{ (ج} \neq ٠ \text{).}$$

■ تتبّع الخطوات التالية، وأعط الحجاج التي تبررها، علمًا بأن ج $\neq ٠$:

- | | |
|---------------------|-----------------|
| (١) $ب = ج$ | (١) ج = ب |
| (٢) $ب - ب = ج - ب$ | (٢) ج - ب = ٠ |
| (٣) $٠ = (ج - ب)$ | (٣) ج = (ج - ب) |
| (٤) $٠ = ج - ب$ | (٤) ج - ب = ٠ |
| (٥) $ب = ج$ | (٥) ج = ب |

من النشاط السابق نستنتج:

إذا كان $P \Rightarrow L$ ، $B \Rightarrow L$ ، $J \Rightarrow L$ وَ $J \neq$.
فإن: $P = B$ تكافئ $J = P$ ج. ب.

* لماذا إذا كان:

$P \Rightarrow L$ ، $B \Rightarrow L$ ، $J \Rightarrow L$ ج. ب.
وَ ح. قاسم لـ ٢

فإن:

$P = B$ تكافئ

$J = P$ ج. ب. ح

وهذا معناه أننا نحصل على المساواة الثانية إذا ضربنا طرفي المساواة الأولى بالعدد ج. كما نحصل على المساواة الأولى إذا قسمنا طرفي المساواة الثانية على العدد ج.

* كيف نتقل من

$3س = ١٥$

إلى $٦س = ٣٠$.

و إلى $٥س = ٢٥$

(٣) حل المعادلات من الدرجة الأولى في L

■ تتبع الخطوات التالية، وأعط في كل مرة الحجج التي تبرر الانتقال من خطوة إلى أخرى:

$$٣س = ٨ + س$$

$$٢س = س - س - ٨$$

$$٢س = ٨$$

$$س = ٤$$

■ هل المعادلة $(٣س = ٨ + س)$ تكافئ المعادلة $(س = ٤)$ ، أي هل لها الحلول نفسها؟ ولماذا؟

■ ما هي مجموعة حل المعادلة $(٣س = ٨ + س)$ في مجموعة التعويض L ؟

في النشاط السابق انتقلت من المعادلة $(٣س = ٨ + س)$ في مجموعة التعويض L إلى المعادلة $(س = ٤)$ ، ووجدت مجموعة الحل: $\{٤\}$. وقد قمت بعمليات تسمح لك في كل مرة الانتقال من معادلة إلى معادلة مكافئة لها، وذلك باستعمالك خصائص علاقة التساوي في L .

المعادلة السابقة ($3س = 8 + س$) تسمى معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد في $ك$.

وفيما يلي بعض الأمثلة عن هذه الأنواع من المعادلات :

▲ مثال ١ :

$$4س - 12 = 3س$$

$$3س + 12 = 3س \quad (\text{حللنا } 4س \text{ إلى } 3س + 12)$$

$$3س = 12 \quad (\text{طرحنا } 3س \text{ من الطرفين})$$

$$س = 4 \quad (\text{قسمنا الطرفين على } 3).$$

مجموعة الحل هي $\{4\}$.

من المستحسن التحقق دائماً من صحة الحل ، وذلك بالرجوع إلى المعادلة المعطاة . والتعويض عن $س$ بالعدد الذي حصلنا عليه :

$$4 \times 4 = 12 + 4$$

$$16 = 16$$

▲ مثال ٢ :

$$3(4 + س) = 18$$

$$3(4 + س) = 18 \quad (\text{حللنا } 18 \text{ إلى } 3 \times 6)$$

$$4 + س = 6 \quad (\text{قسمنا الطرفين على } 3)$$

$$س = 6 - 4 \quad (\text{حللنا } 6 \text{ إلى } 4 + 2)$$

$$س = 2 \quad (\text{طرحنا } 4 \text{ من الطرفين})$$

مجموعة الحل هي $\{2\}$.

التحقق من الجواب :

$$3(4 + 2) = 18$$

$$18 - 16 = 2$$

$$18 - 18$$

▲ مثال ٣ :

$$6س - 7 = 2س$$

$$6س - 2س = 7 \text{ (أضفنا 7 إلى الطرفين)}$$

$$4س = 7 \text{ (طرحنا 2س من الطرفين)}$$

وبما أن 7 لا تقبل القسمة على 4 ، فلا يوجد عدد كلي س ، بحيث إن

$$4س = 7$$

مجموعة الحل هي إذن المجموعة الخالية ϕ ، والمعادلة مستحيلة في \mathbb{Z} .

▲ مثال ٤ :

$$3س + 6 = 2س + 4$$

$$3س = 2س + 4 - 6 \text{ (طرحنا 2س من الطرفين)}$$

$$س + 2 = 0 \text{ (طرحنا 4 من الطرفين)}$$

لا يوجد أي عدد كلي إذا جمعناه مع 2 كان الحاصل صفرًا.

فمجموعة الحل هي إذن ϕ ، والمعادلة مستحيلة في \mathbb{Z} .

ملاحظة : يمكن اتباع إحدى الطريقتين التاليتين لحل المعادلة :

$$5س - 4 = 3س + 2$$

$$2س = 4 - 2 \text{ الطريقة الأولى :}$$

$$2س = 2$$

$$س = 1$$

* نَبِّينَ لماذا المعادلات التالية هي

مستحيلة في \mathbb{Z} .

$$س + 4 = 0 \quad 2س = 9$$

$$س + 112 = 3س \quad 971 = 3س$$

أعط أمثلة أخرى عن معادلات

مستحيلة في \mathbb{Z}

أو

الطريقة الثانية : ٥ س - ٣ س - ٦

٢ س = ٦

٣ س -

حلّ معادلة من الدرجة الأولى ذات
مجهول واحد في ك أقوم بما يلي :
(١) أحذف الأعداد المعلومة من أحد
الأطراف .

(٢) أحذف المجهول من الطرف
الآخر .

في الطريقة الأولى بدأنا بحذف المجهول س من الطرف الثاني . ثم حذفنا
الأعداد المعلومة من الطرف الأول .

في الطريقة الثانية بدأنا بحذف الأعداد المعلومة من الطرف الأول . ثم
حذفنا المجهول من الطرف الثاني .

وفي كلتا الحالتين وجدنا الحل نفسه .

تمارين

(١) جد مجموعة الحل للمعادلة: $س^3 + 3 = س^4$

في كل من مجموعات التعويض التالية:

ت_١ = { ٠، ١، ٢ } ، ت_٢ = { ٠، ١، ٢، ٣ } ،

ت_٣ = { ٤، ٥، ٦، ٧ } .

(٢) $٢ + ب = ٣ + پ$ و $ب$ عددان كليان بحيث إن: $٣ + پ = ٢ + ب$.

أ - أي العددين أكبر: $پ$ أم $ب$ ؟ وبكم؟

ب - هل المساواة $(٦٥ + پ = ٦٤ + ب)$ صحيحة؟ ولماذا؟

ج - هل المساواة $(٦ + پ = ١٨ + ب)$ صحيحة؟ ولماذا؟

د - هل المساواة $(٥ + پ = ١٨ + ب)$ صحيحة؟ ولماذا؟

هـ - احسب $س$ كي تكون المساواة التالية صحيحة: $٩ + پ = ٢٧ + ب$

(٣) $٢ + ب = ٣$

أ - ماذا تستنتج من $٢ + ب = ٣$ ؟

ب - ماذا تستنتج من $٢ + ب = ١$ ؟

ج - ماذا تستنتج إذا كان:

$٢ + ب = ٥$ ، $٢ + ب = ٧$ ، $٢ + ب = ١١$.

(٤) $(س، ص) \Rightarrow س \times ص$ ما هي القيم الممكنة لـ $س$ و $ص$ ، إذا كان $س \times ص = ٣٦$ ؟

(٥) جد في $س$ مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

$س + ٥ = ١٦$

$٨ = س - ٢$

$٥ = س - ٤$

$٤ = (س + ٢) - ٣$

$١٢ + س = ٤ + (س + ٤)$

$٣ = (س + ٢) - ٣$

$٠ = (س - ٢) - (س - ٣)$

$٠ = (س + ١) - (س - ٥)$

(٦) جد في $س$ مجموعة الحل دون كتابة، معتمداً على عمليات ذهنية:

$٢٠ = ١٠ + س$ ، $٢٠ = (س + ١)$

$٨٠ = ٢٠ + س$ ، $١٢ = (س + ٢)$

$٢٠٠ = ١٠ + س$ ، $٩ = ٢ - س$

(٧) احسب في $س$ قيمة $ص$ ، ثم قيمتي $ص$ و $ع$ في المعادلة $(س + ص + ع = ١٢)$ إذا كان: $ص = ٢$ ، $٢ = س + ع$ ، $٣ = س$.

(٨) إذا كان $ص = ٣$ فجد في $س$ قيمة $ص$ ، في المعادلة: $ص^٢ + س + ص = (٢ + ص)^٢ - ٢$

الدرس الثالث : مسائل حسابية

كثير من المسائل الحسابية يمكن حلها بواسطة معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد. ويتم ذلك باتباع الخطوات التالية :

أ - اختيار المجهول ، وتنظيم المعادلة .

ب - حل المعادلة .

ج - التحقق من صحة الجواب .

وهذه بعض الأمثلة على ذلك :

▲ مثال ١ : ما هو العدد الذي إذا أضفت خمسة إلى ضعفه حصلت على العدد ٢٥ ؟

أ - اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

ليكن س العدد المطلوب . ضعفا العدد س هو العدد ٢ س .

المعادلة التي تترجم المسألة هي :

$$٢ س + ٥ = ٢٥ .$$

ب - حل المعادلة :

$$٢ س + ٥ = ٢٥$$

$$٢ س = ٢٠ \text{ (طرحنا (٥) من الطرفين)}$$

$$س = ١٠ \text{ (قسمنا الطرفين على (٢)}$$

الجواب : العدد المطلوب هو ١٠

ح - التحقق من صحة الجواب :

ضعف ١٠ هو العدد ٢٠ . إذ أضفنا إلى ٢٠ العدد ٥ نحصل على ٢٥ .
وهذا هو المطلوب .

▲ مثال ٢ : ما هما عددا الفرق بينهما ١٥ ومجموعهما - ٢٣ ؟

أ اختيار الجواب وتنظيم المعادلة :

ليكن س العدد الأصغر . العدد الأكبر هو إذن : $س + ١٥$.
وعما أن مجموع العددين يساوي ٢٣ . فالمعادلة التي تترجم المسألة هي :

$$س + (س + ١٥) = ٢٣$$

ب حل المعادلة .

$$س + (س + ١٥) = ٢٣$$

$$٢س + ١٥ = ٢٣$$

$$٢س = ٢٣ - ١٥$$

$$٢س = ٨$$

$$س = ٤$$

الجواب : العدد الأصغر = ٤ . والعدد الأكبر = ١٩ .

ج التحقق من صحة الجواب :

$$\text{الفرق بين } ١٩ \text{ و } ٤ \text{ هو : } ١٩ - ٤ = ١٥$$

$$\text{مجموع } ١٩ \text{ و } ٤ \text{ هو : } ١٩ + ٤ = ٢٣$$

■ نرسم بخرف س إلى عدد لا أكبر . ثم نطبع المعادلة على هذا الأسس .

١. حل

▲ مثال ٣ : مع عمر ثلاثة أضعاف ما مع أحمد من الريالات .
أعطى عمر ١٠ ريالات لأحمد ، فتساوت نقودهما .
كم ريالاً كان مع كلٍ منهما ؟

أ - اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :
ليكن س عدد الريالات التي مع أحمد .
يكون مع عمر : ٣ س ريالاً .
بعد أن أعطى عمر أحمد ١٠ ريالات بقي معه (٣ س - ١٠) ريالاً .
وأصبح مع أحمد : (س + ١٠) ريالاً .
وبما أن نقود عمر وأحمد أصبحت متساوية . فالمعادلة هي إذن :

$$٣ س - ١٠ = س + ١٠$$

ب - حلّ المعادلة :

$$٣ س - ١٠ = س + ١٠$$

$$٣ س - س = ١٠ + ١٠$$

$$٢ س = ٢٠$$

$$س = ١٠$$

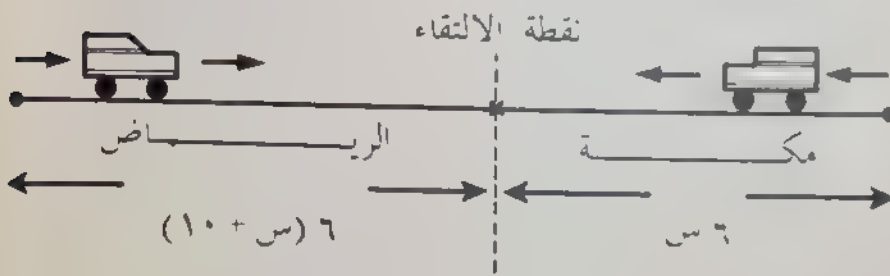
الجواب : مع أحمد ١٠ ريالات ، ومع عمر $٣ \times ١٠ = ٣٠$ ريالاً .

ج - التحقق من الجواب

مع أحمد ١٠ ريالات ، مع عمر : $٣ \times ١٠ = ٣٠$ ريالاً . بعد أن أعطى
(عمر) أحمد ١٠ ريالات ، بقي معه : $٣٠ - ١٠ = ٢٠$ ريالاً وأصبح
مع عمر : $١٠ + ١٠ = ٢٠$ ريالاً .

▲ مثال ٤ : المسافة بين مكة المكرمة والرياض هي ٩٦٠ كلم .
انطلقت سيارة أولى من مكة باتجاه الرياض . وانطلقت سيارة ثانية من الرياض باتجاه مكة .

إذا كانت سرعة السيارة الثانية تزيد عن سرعة السيارة الأولى بـ ١٠ كم/سا ، فما هي سرعة كل منهما ، إذا التقتا بعد سیر ست ساعات ؟ .



أ اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

لتكن س سرعة السيارة الأولى .

فتكون سرعة السيارة الثانية : س + ١٠

المسافة التي قطعها السيارة الأولى : ٦ س

المسافة التي قطعها السيارة الثانية : ٦ (س + ١٠)

المسافة التي قطعها السيارتان : ٩٦٠ كلم

المعادلة هي إذن :

$$٩٦٠ = ٦ (س + ١٠) + ٦ س$$

ب - حل المعادلة :

$$٩٦٠ = ٦ (س + ١٠) + ٦ س$$

$$٩٦٠ = ٦ س + ٦٠ + ٦ س$$

$$٩٠٠ = ١٢ س$$

$$س = 900 \div 12$$

$$س = 75$$

الجواب : سرعة السيارة الأولى : 75 كلم / سا .

سرعة السيارة الثانية : 85 كلم / سا .

ج - التحقق من الجواب :

سرعة السيارة الثانية تزيد عن سرعة الأولى بـ $85 - 75 = 10$ كلم / سا .

المسافة التي قطعتها السيارتان :

$$85 \times 6 + 75 \times 6 = (85 + 75) \times 6$$

$$160 \times 6 =$$

$$960 \text{ كلم} =$$

■ افترض أن سرعة السيارة الثانية هي س .

ما هي سرعة السيارة الأولى ؟

نظم المعادلة على هذا الأساس ، و جد الحل .

▲ مثال 5 : عمر اب 38 سنة وعمر ابنه 14 سنة . بعد كم سنة يصبح عمر

الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن ؟

أ - اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

ليكن س عدد السنوات المطلوبة .

بعد س سنة يصبح عمر الاب : $38 + س$

بعد س سنة يصبح عمر الابن : $14 + س$

وبما أن عمر الأب سيكون ثلاثة أضعاف عمر الابن بعد س سنة ،

فالمعادلة هي إذن :

$$38 + س = 3(14 + س)$$

ب حلّ المعادلة :

$$38 + \text{س} = 3(14 + \text{س})$$

$$38 + \text{س} = 42 + 3\text{س}$$

$$38 + \text{س} = 38 + 4 + 3\text{س}$$

$$\text{س} = 4 + 3\text{س}$$

$$\text{س} = 4 + 2\text{س} + \text{س}$$

$$0 = 4 + 2\text{س}$$

$$0 = 2(\text{س} + 2)$$

$$0 = \text{س} + 2$$

أو

$$\text{س} + 2 = 0$$

هذه المعادلة هي مستحيلة في \mathbb{R}

النتيجة : لا يمكن أن يصبح عمر الأب ثلاثة اضعاف عمر الابن.

■ عند حل مسألة عتبات م هو مصوب الآن هو الثاني

فهل كم سنة كان عمر الاب ثلاثة اضعاف عمر الابن ؟

تمارين :

(١) قبض عامل أجرته عن ١٠ أيام عمل ، وكان معه ٨٥ ريالاً .

إذا صرف ٤٠ ريالاً ، وبقي معه ٣٤٥ ريالاً ، فما هي أجرته اليومية ؟

(٢) عدد مؤلف من رقمين : رقم آحاده يزيد عن رقم عشراته باثنين .

ما هو هذا العدد إذا كان مجموع رقيه ١٤ ؟

(٣) يزيد عمر أب عن عمر ابنه ٢٧ سنة . قبل ١١ سنة كان عمر الأب ٤ أضعاف عمر الابن .
ما هو عمر كل منهما الآن ؟

(٤) في القسمة الإقليدية لعدد على آخر كان خارج القسمة ٣ ، والباقي ٥ . إذا كان المقسوم ٥٦ ، فما هو المقسوم عليه ؟

(٥) مجموع عمري زياد و وليد ٤٩ سنة . منذ ٨ سنوات كان عمر زياد ضعف عمر وليد .
ما هو عمر كل منهما الآن ؟

(٦) خرج تلاميذ الصف إلى الملعب وتوزعوا ثلاث فرق :

الفرقة الأولى تزيد عن الفرقة الثانية بأربعة تلاميذ ، وتنقص عن الثالثة بخمسة تلاميذ .

ما هو عدد التلاميذ في كل فرقة إذا كان في الصف ٣١ تلميذاً .

(٧) باع مزارع ٤٩ بيضة على دفعتين . إذا كان ما باعه في الدفعة الأولى يزيد عما باعه في الدفعة الثانية بسبع بيضات ، فكم بيضة باع في كل دفعة ؟

(٨) أربعة أضعاف عدد تساوي ثلاثة أضعاف العدد الذي يليه مباشرة .
ما هو هذا العدد ؟

(٩) مجموع ثلاثة أعداد متتالية يساوي ٤٥ .
ما هي هذه الأعداد ؟

(١٠) لدى هشام ٥ ريالات زيادة عما لدى سعيد . أربعة أضعاف ما لدى هشام زائد ثلاثة أضعاف ما لدى سعيد تساوي ٧٦ ريالاً . كم ريالاً لدى كل منهما ؟

(١١) مع محمود وقاسم ٦٥ ريالاً أعطينا محمود ٤ ريالات، وأعطينا قاسم ٣ ريالات فأصبح مع محمود ثلاثة أضعاف ما مع قاسم.
كم ريالاً كان مع كل منهما؟

(١٢) قسّم مبلغ ١٨٠ ريالاً بين ثلاثة أشخاص.
بجيث أخذ الأول ٥ ريالات زيادة عن الثاني، وأخذ الثالث ١٠ ريالات زيادة عن الأول والثاني معاً.
ما هي حصة كل من الثلاثة؟

(١٣) سافر مروان مدة أربعة أيام ومعه ٣٨٠ ريالاً.
وعاد ومعه ٥ ريالات.
كم ينفق في كل يوم ضعفي ما كان ينفقه في اليوم الذي يسبقه.

كم كان مصروفه في كل يوم من الأيام الأربعة؟

(١٤) بستان مستطيل الشكل طول محيطه ١٨٠ م.
لو زاد عرضه ٥ أمتار ونقص طوله ٥ أمتار لأصبح مربع الشكل.
ما هي مساحة هذا البستان؟

الدرس الرابع : المتراجحات في مجموعة الأعداد الطبيعية

(١) المتباينات

نعلم أن الرمز $<$ يعني «أكبر من»، وأن الرمز $>$ يعني «أصغر من». نقول مثلاً إن العدد ٩ هو أكبر من العدد ٧، ونكتب $٧ < ٩$. ونقول أيضاً: إن العدد ٧ هو أصغر من العدد ٩، ونكتب: $٧ > ٩$. $٧ < ٩$ تسمى متباينة. ٩ هو طرفها الأول و ٧ طرفها الثاني. كذلك $٧ > ٩$ تسمى متباينة. ٧ هو طرفها الأول و ٩ طرفها الثاني. وكلتا المتباينتين تعني أن عملية طرح الأصغر من الأكبر هي عملية ممكنة في مجموعة الأعداد الكلية \mathbb{N} ، وأن $(٩-٧)$ هو عدد كلي أكبر من الصفر، و هو الفرق بين الأكبر والأصغر.

وعلى العموم إذا كان a و b عددين كليين فإن:

$$a < b \text{ تعني } b > a$$

والعكس بالعكس. وكل واحدة من المتباينتين تعني أن $a - b$ هو عدد كلي أكبر من الصفر.

■ تعلم أن $a < b$ تعني أن a هو على يمين b عند ترتيب الأعداد على خط مستقيم.

لاحظ الرسم أدناه واحسب $a - b$ ، ثم املا الفراغات باختيارك المناسب من الرموز التالية: $(>)$ ، $(<)$ ، $(=)$:



$$\begin{aligned} 1 - b & \dots 1 - a \\ 2 - b & \dots 3 - a \\ 3 - b & \dots \end{aligned}$$

١٣ ... للأعداد لثالية. وعين الفرق في كل

$$\begin{aligned} 1 - b & \dots 3 - a \\ 2 - b & \dots 4 - a \\ 3 - b & \dots 5 - a \end{aligned}$$

(٢) خصائص المتباينات

المتباينة والجمع والطرح : العدد $(1 + p)$ هو العدد الذي يلي p مباشرة. والعدد $(1 - b)$ هو العدد الذي يلي b مباشرة.

ملاحظ على الشكل ١ أنه إذا كان : $p < b$ ، فإن :

$$1 + b < 1 + p$$

كذلك يمكننا إضافة العدد واحد إلى طرفي المتباينة الجديدة. فنحصل

على :

$$1 + (1 + b) < 1 + (1 + p)$$

أو :

$$2 + b < 2 + p$$

ولو كررنا العملية السابقة ج مرة. لحصلنا على :

$$p + ج < b + ج$$

ولو طرحنا من المتباينة الأخيرة العدد واحد. وكررنا ذلك ح مرة. لعدنا

من جديد إلى المتباينة $(p < b)$.

وبالتالي نستنتج :



شكل (١)

إذا كان: $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ و $R \Rightarrow P$
فإن: $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ تكافئ $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$

* لماذا إذا كان
 $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$
فإن
 $P \Rightarrow R$ تكافئ
 $P \Rightarrow R$

وهذا معناه أننا نحصل على المتباينة الثانية إذا أضفنا إلى طرفي المتباينة الأولى العدد ج. كما نحصل على المتباينة الأولى إذا طرحنا من طرفي المتباينة الثانية العدد ج.

المتباينة والضرب والقسمة : سنثبت أن:

$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ تكافئ ج $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ (ج $\neq 0$).

■ تتبع الخطوات التالية، وأعط الحجاج التي تتردها، علمًا بأن ج $\neq 0$.

(1) $P \Leftrightarrow Q$ ج $P \Leftrightarrow Q$

(2) $P - Q \Leftrightarrow 0$ ج $P - Q \Leftrightarrow 0$

(3) ج $(P - Q) \Leftrightarrow 0$ ج $(P - Q) \Leftrightarrow 0$

(4) ج $P - Q \Leftrightarrow 0$ ج $P \Leftrightarrow Q$

(5) ج $P \Leftrightarrow Q$ ج $P \Leftrightarrow Q$

* كيف تنتقل من

3 س + 5 < 10

إلى 3 س + 8 < 13

و إلى 3 س < 5

* لماذا إذا كان

$P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$

و ج قاسما مشتركا لـ P و Q

فإن

$P \Leftrightarrow Q$ تكافئ

$P \Leftrightarrow Q$

من النشاط السابق نستنتج :

إذا كان $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ و $R \Rightarrow P$
فإن: $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ تكافئ ج $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$

وهذا معناه أننا نحصل على المتباينة الثانية إذا ضربنا طرفي المتباينة الأولى
بعدد ح. كم حصل على المتباينة الأولى إذا قسمنا طرفي المتباينة الثانية على
العدد ج.

* كيف تنتقل من

$$٨ \text{ س } < ١٦$$

$$\text{إلى } ٢٤ \text{ س } < ٤٨ ؟$$

$$\text{و إلى } ٢٢ \text{ س } < ٤٤ ؟$$

(٣) متراجحات الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد

▲ مثال ١ : س هو متغير في مجموعة الأعداد:

$$P = \{ ١٠, ٨, ٥, ٣, ٢ \}$$

و ٢ س + ١ > ١٥، هي جملة يمكن أن تكون صحيحة إذا عوضنا

عن س بأحدى القيم التي تأخذها في المجموعة P.

■ املا الجدول التالي، و عيّن القيم التي إذا أخذتها س تحققت المتباينة:

$$٢ \text{ س } + ١ > ١٥$$

١٠	٨	٥	٣	٢	س
					٢ س
					٢ س + ١

لاحظت أن المتباينة (٢ س + ١ > ١٥) تتحقق إذا عوضنا عن س

بأحد الأعداد: ٢، ٣، ٥ فقط من المجموعة P.

المجموعة P تسمى مجموعة التعويض.

(٢ س + ١ > ١٥) تسمى متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهول

واحد س في مجموعة التعويض P.

المجموعة الجزئية $ج = \{ ٥ ، ٣ ، ٢ \} \subset پ$ ، والتي عناصرها هي الأعداد التي تحقق المتباينة ، تسمى مجموعة الحل .
كل من الأعداد (٥ ، ٣ ، ٢) هو حل للمراجعة .

▲ مثال ٢ : ص هو متغير في المجموعة :

$$ب = \{ ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ \} .$$

■ املاً الجدول التالي ، وعيّن القيم التي إذا اخذها ص في ب تحققت المتباينة :

$$٣ ص - ٢ < ٧$$

ص	١	٢	٣	٤	٥	٦
٣ ص -						
٣ ص - ٢						

لاحظت أن المتباينة (٣ ص - ٢ < ٧) تتحقق إذا عوضنا عن ص بأحد الأعداد (٤ ، ٥ ، ٦) .

(٣ ص - ٢ < ٧) هي مراجعة ذات مجهول واحد ص .

ب = { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } هي مجموعة التعويض .

ج = { ٤ ، ٥ ، ٦ } هي مجموعة الحل .

كل من الأعداد (٤ ، ٥ ، ٦) هو حل للمراجعة .

▲ مثال ٣ : إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ وليكن P مجموعة المتراجحة في S ، فكم عدد المتراجحة في P ؟

لاحظت أن أيًّا من الأعداد (٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢) ليست حلاً للمتراجحة :

$$٢ \text{ س } ١ + ١٥ > ١٥$$

مجموعة الحل هي إذن المجموعة الخالية ϕ .

نقول في هذه الحال : إن المتراجحة (٢ س ١ + ١٥ > ١٥) هي مستحيلة في مجموعة التعويض $\{٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢\}$.

ملاحظة : لو عدنا إلى المثل ١ لرأينا بأن المتراجحة نفسها كانت لها الحلول (٢ ، ٣ ، ٥) في مجموعة التعويض $\{٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٠\}$.
من هنا أهمية تحديد مجموعة التعويض بالنسبة لمتراجحة معطاة .

(٤) حل المتراجحات من الدرجة الأولى في \mathbb{N}

س متغير في المجموعة :

$$P = \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$$

■ جد : يتابعك الأمثلة السابقة ، حلول المتراجحة :

٢ س - ٥ <

في مجموعة لتعريف

■ هل يمكنك تقديم...
لتعريف هي مجموعة...
٢

لاحظت في النشاط السابق عدم تمكنك من تحديد حلول المتراجحة
(٢ س + ٥ < ٧) في المجموعة \mathbb{N} وبالطريقة المعتمدة في الأمثلة السابقة ؛
وذلك راجع إلى أن المجموعة \mathbb{N} هي مجموعة غير منتهية، وليس باستطاعتك
تجربة جميع عناصرها لمعرفة الحلول منها.

في هذه الحال نستعمل خصائص علاقة التباين في \mathbb{N} لتحويل متراجحات
معطاة إلى متراجحات مكافئة، لها الحلول نفسها، وتمكننا من إيجاد هذه
الحلول دون الاعتماد على الطريقة المعتمدة في الأمثلة السابقة.
وإليك بعض الأمثلة :

▲ مثال ١ :

$$٤ \text{ س} - ٧ > ٥ + \text{ س}$$

$$٤ \text{ س} - ٧ + ٧ > ٥ + \text{ س} + ٧ \quad (\text{أضفنا } ٧ \text{ إلى الطرفين})$$

$$٤ \text{ س} > \text{ س} + ١٢$$

$$٣ \text{ س} + \text{ س} > \text{ س} + ١٢$$

$$٣ \text{ س} > ١٢ \quad (\text{طرحنا س من الطرفين})$$

$$٣ \text{ س} < ٣ \times ٤$$

$$\text{س} > ٤ \quad (\text{قسمنا الطرفين على } ٣)$$

مجموعة الحل هي :

$$\mathbb{C} = \{ ٠, ١, ٢, ٣ \}$$

▲ مثال ٢ :

$$س + ٧ \geq ٢ س$$

$$س + ٧ \geq س + س$$

$$٧ \geq س \text{ (طرحنا س من الطرفين)}$$

$$٧ \leq س$$

مجموعة الحل هي :

$$ح - \{٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, \dots\}$$

وهي مجموعة غير منتهية.

▲ مثال ٣ :

$$٣ س + ١٦ > ١٢ + س$$

$$٣ س + ١٢ > ٤ + ١٢ + س$$

$$٣ س + ٤ > س \text{ (طرحنا ١٢ من الطرفين)}$$

$$٢ س + ٤ > س$$

$$٢ س + ٤ > ٠ \text{ (طرحنا س من الطرفين)}$$

$$٢ + ٢ > ٠ \text{ (قسمنا الطرفين على ٢)}$$

مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ϕ .

▲ مثال ٤ :

$$٥ س + ٣ < ٣ + س$$

$$٥ س < ٣ + س \text{ (طرحنا ٣ من الطرفين)}$$

$$٢ س < ٣ \text{ (طرحنا س من الطرفين)}$$

مجموعة الحل هي :

$$ح - \{٢, ٣, ٤, ٥, ٦, \dots\}$$

وهي مجموعة غير منتهية.

تمارين

(١)

أ - أكمل ما يلي :

$$12 < 5 \text{ لأن } 12 \quad 5 \quad \dots\dots$$

$$8 < 9 \text{ لأن } 8 \quad 9 \quad \dots\dots + 8$$

$$1 < 20 \text{ لأن } 1 \quad 20 \quad \dots\dots + 1$$

$$14 > 16 \text{ لأن } 16 \quad 14 \quad \dots\dots + 14$$

ب - أكمل ما يلي :

$$12 - 5 = (5 \quad 12) + 5$$

$$9 - 8 = (\dots \dots) + 8$$

$$20 = (\dots - \dots) + 1$$

$$16 = (\dots \dots) + 14$$

(٢) س \exists ك و ص \exists ك .

اشرح كيف تنتقل من متباينة إلى أخرى :

أ - إذا كان (س \geq ص) فإن :

$$(2 \text{ س} + 6 \geq 2 \text{ ص} + 6) .$$

ب - إذا كان (س - 2 > ص - 2) فإن :

$$(2 \text{ س} + 1 > 2 \text{ ص} + 1) .$$

ج - إذا كان (س + 1 < 2 ص + 3) فإن :

$$3 \text{ س} + 5 < 6 \text{ ص} + 11$$

(٣) حد مجموعة الحل في ك لكل من المتراجحات التالية :

$$7 \geq 3 + \text{س}$$

$$2 \text{ س} - 4 > \text{س}$$

$$2 \text{ س} > 9$$

$$\text{س} + 4 > 4$$

$$2 \text{ س} + 1 > 3 \text{ س} - 2$$

$$5 \text{ (س} + 1) \geq 10$$

(٤) إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الزوجية . فجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية :

$$\text{س} + 4 \geq 10$$

$$4 \text{ س} < 2 \text{ س} + 10$$

$$21 < \text{س}$$

$$5 \text{ س} < 27$$

(٥) إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الفردية

فجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية :

$$\text{س} + 5 > 12$$

$$3 \text{ س} \leq 2 \text{ س} + 1$$

$$3 \text{ س} + 5 - \text{س} > 9$$

$$\text{س} + 3 + 2 \text{ س} > 3 \text{ س} + 4$$

الفصل العاشر :

الناظر حول نقطة والإانسحاب والمتجهات

الدرس الأول : الناظر حول نقطة

الدرس الثاني : الراسي على مستقيم

الدرس الثالث : المتجهات

الدَّرْسُ الأول : التناظر حول نقطة

(١) تناظر نقطتين حول نقطة

■ على الشكل (١) : P ، M و B ثلاث نقاط على استقامة واحدة، و M هي بين P و B تحقق من أن $PM = MB$.



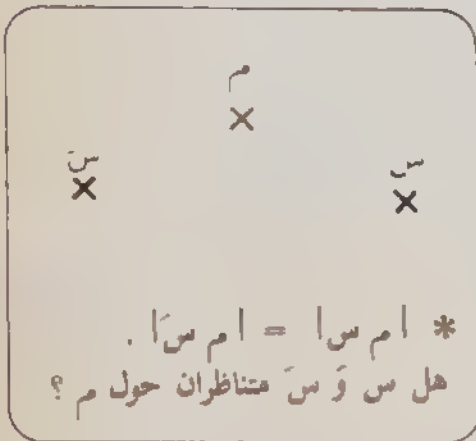
شكل (١)

لاحظت أن M هي منتصف $[P, B]$. نقول : إن النقطتين P و B هما متناظرتان حول M .

M هي مركز تناظر النقطتين P و B .

B هي نظير P بالتناظر حول M .

كذلك P هي نظير B بالتناظر حول M .



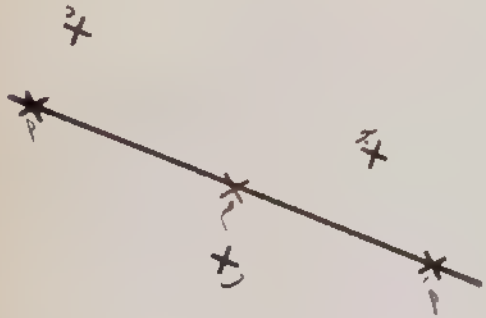
نقول عن نقطتين P و B إنها متناظرتان حول نقطة M ، إذا كانت النقطة M هي منتصف القطعة $[P, B]$.

(٢) التناظر حول نقطة في المستوى

■ على الشكل (٢) عَيِّنَا في المستوى النقاط : P ، B ، C ، D و M .

تحقق من أن P و A متناظرتان حول M .

عَيِّنْ نظير كل من النقاط B ، C ، D بالتناظر حول M ، وسمّها B' ، C' ، D' .



شكل (٢)

■ اختر نقطة هـ من المستوى وعَيِّن نظيرها هـ بالتناظر حول م.
ما هـ نظير كل من النقاط : أ. ب. جـ، دـ، هـ بالتناظر حول م.

لاحظت في النشاط السابق أننا إذا أخذنا أية نقطة س من المستوى،
نستطيع تحديد نقطة سـ من المستوى، بحيث تكون م منتصف [سسـ]
وبالتالي تكون س و سـ متناظرين حول م.

التناظر حول نقطة م في المستوى هو عملية تحويل كل نقطة
س من المستوى إلى نقطة سـ، بحيث تكون م هي منتصف
[سسـ]. النقطة م هي مركز التناظر.

* ما هو نظيرم بالتناظر حول م؟

(٣) تناظر الأشكال حول نقطة

على الشكل (٣) مثلثان أ ب جـ و هـ ط ي ونقطة م.

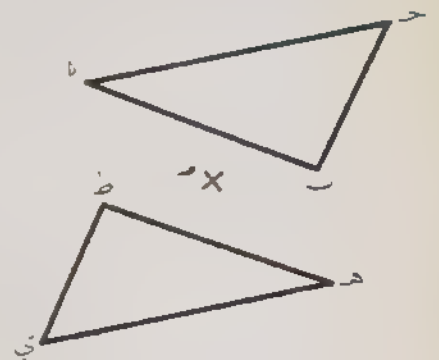
■ تحقق من أن النقاط : أ. ب. جـ و هـ، ط، ي، هي متناظرة زوجًا
زوجًا بالتناظر حول م.

■ خذ نقطة س على أحد أضلاع المثلث أ ب جـ، وعَيِّن نظير س بالتناظر
حول م. ماذا تلاحظ؟

خذ نقطة ص داخل المثلث أ ب جـ. عَيِّن نظير ص بالتناظر حول م.
ماذا تلاحظ؟

خذ نقطة ع خارج المثلث أ ب جـ. عَيِّن نظير ع بالتناظر حول م. ماذا
تلاحظ؟

نقول : إن المثلثين أ ب جـ و هـ ط ي هما متناظران حول م. نقول أيضًا :



شكل (٣)

إن M هي مركز تناظر الشكلين AB و $هـ ط ي$ ، وإن $هـ ط ي$ هو نظير AB جـ بالتناظر حول M . وكذلك AB جـ هو نظير $هـ ط ي$ بالتناظر حول

مركز

نقول عن شكلين إنهما متناظران حول نقطة M ، إذا كانت كل نقطة من أحدهما متناظرة مع نقطة من الشكل الآخر بالتناظر حول M .

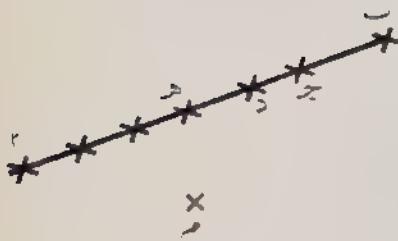
٤) نظير قطعة مستقيم

$[AB]$ قطعة مستقيم، M نقطة من المستوى، والنقاط $جـ، د، هـ...$ هي منتمية إلى $[AB]$.

■ ارسم نظير كل من النقاط $A, B, جـ، د، هـ...$ بالتناظر حول M ، وسمّها $A', B', جـ', د', هـ', ...$

ماذا تلاحظ بالنسبة لاستقامة النقاط النظيرة؟ ما هو نظير القطعة $[AB]$ ؟

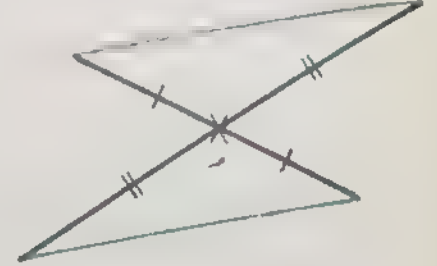
قارن طول $[AB]$ بطول نظيرها. ماذا تلاحظ؟



في النشاط السابق لاحظت أن نظير قطعة مستقيم هو قطعة مستقيم مطابقة لها، وبالتالي، فإن القطعتين لها الطول نفسه. وهذه النتيجة صحيحة، أيًا كانت القطعة، وأيًا كان وضع مركز التناظر M .

شكل (٤)

التناظر حول نقطة هو تقايس يحول كل قطعة مستقيم إلى قطعة مستقيم لها الطول نفسه.



[$\hat{A}B$] نظير [$\hat{A}B$] بالتناظر
حول م
 $| \hat{A}B | = | \hat{A}B |$
التناظر حول نقطة هو تقايس.

(٥) نظير مستقيم

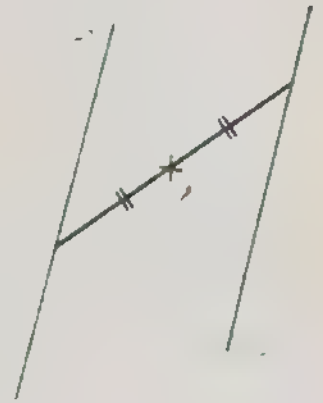
■ رسم مستقيم $س ص$ ، وعيّن نقطة م لا تنتمي إليه.
على بعدة بقدر متساوية عن $س ص$ ، وحدّد بقدر متساوية معها بالمشتر

تحقق من أن النقاط النظرية هي على استقامة واحدة، وسمّ $س ص$
المستقيم الذي تنتمي إليه هذه النقاط. تحقق من توازي المستقيمين $س ص$ و
 $س ص$

من النشاط السابق نستنتج:

المستقيم

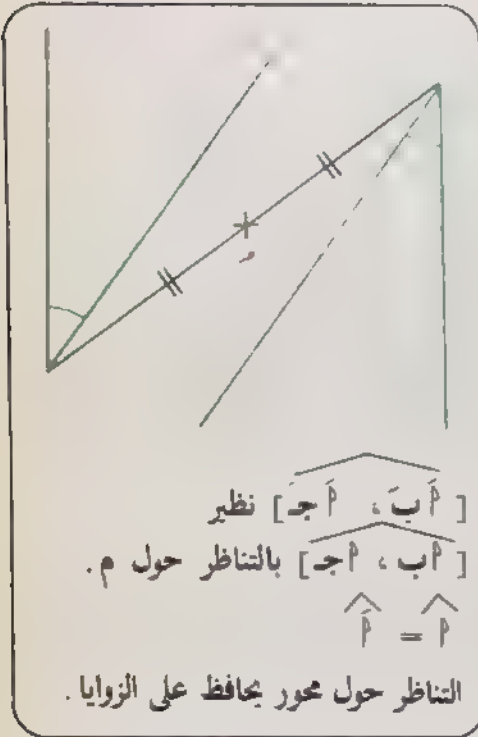
التناظر حول نقطة يحول كل مستقيم إلى مستقيم موازٍ له.



$س ص$ نظير $س ص$ بالتناظر حول
م
 $س ص \parallel س ص$

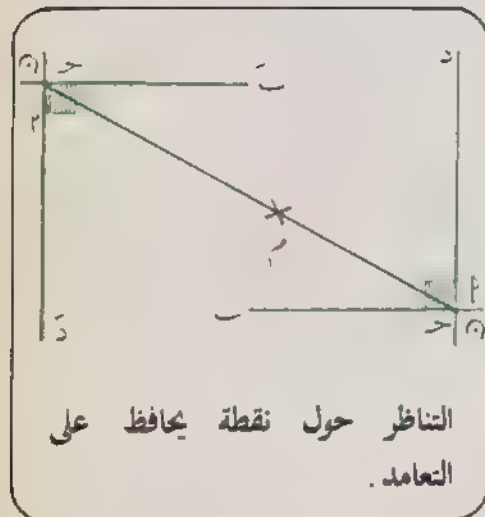
(٦) نظير قطاع زاوي

■ ارسم قطاعاً زاوياً [$\hat{A}B$ ، $\hat{A}C$]، وعيّن نقطة م.
سمّ نظير كل من [$\hat{A}B$ و [$\hat{A}C$] بالمشتر حول م، وسمّهم $أ ب$
و [$أ ج$].



من النشاط السابق نستنتج :
التناظر حول نقطة يحول كل قطاع زاوي إلى قطاع زاوي متطابق معه.
نقول : إن التناظر حول نقطة يحافظ على الزوايا.

التناظر حول نقطة يحول كل قطاع زاوي إلى قطاع زاوي متطابق معه.
نقول : إن التناظر حول نقطة يحافظ على الزوايا.



من ناحية أخرى، إذا كان \widehat{AB} و \widehat{CD} مستقيمين متعامدين متقاطعين في M (الشكل المجاور) فإن نظيريهما بالتناظر حول M هما مستقيمان متوازيان معها. ومتقاطعان في N . وبحيث يكون القطاعان $[AB, CD]$ و $[A'B', C'D']$ متطابقين. وهذا يعني أن القطاع $[A'B', C'D']$ هو قطاع زاوي قائم، لأن $[AB, CD]$ هو قطاع زاوي قائم. وبالتالي فإن : $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{C'D'}$ هما مستقيمان متعامدان.

التناظر حول نقطة يحافظ على التعامد. أي إنه يحول مستقيمين متعامدين إلى مستقيمين متعامدين.

(٧) مركز تناظر شكل

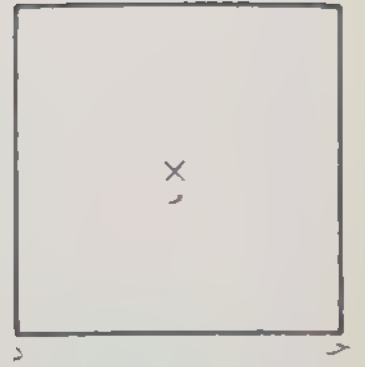
■ الشكل (٥) هو شكل متوازي أضلاع $ABCD$ (شكل ٥)

حيث M هي نقطة تقاطع القطرين AC و BD .

أثبت أن M هي نقطة تناظر الشكل.

الحل: نلاحظ أن $ABCD$ شكل متوازي أضلاع، إذن $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$.
 ونعلم أن M هي نقطة تقاطع القطرين AC و BD .

لنثبت أن M هي نقطة تناظر الشكل. نلاحظ أن $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$.
 ونعلم أن M هي نقطة تقاطع القطرين AC و BD .
 إذن M هي نقطة تناظر الشكل.



شكل (٥)

لاحظت في النشاط السابق أن نظير أي نقطة تنتمي إلى الشكل P بجد
 بالتناظر حول M هي نقطة تنتمي إلى الشكل نفسه. نقول: إن M هي مركز
 تناظر للشكل P بجد.

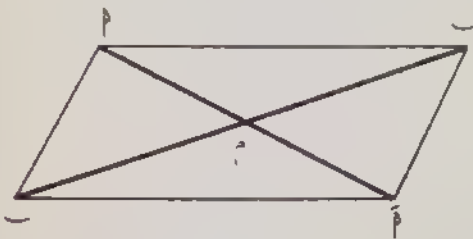
وعلى العموم:

نقول عن نقطة M إنها مركز تناظر لشكل ما، إذا كان نظير
 كل نقطة من الشكل بالتناظر حول M هو نقطة من
 الشكل نفسه. ونقول في هذه الحال: إن لشكل المعني مركز
 تناظر.



ارسم بدون استعمال الأطوال، وبطريقتين مختلفتين، نظير القطاع $[P, X]$ بالتناظر حول م.

(٤) على الرسم التالي النقطة م هي منتصف $[P, P]$ و $[B, B]$.



أ - بالتناظر حول م:

حدّد نظير كل من P، P-bar، B، B-bar. حدّد نظير القطعة $[P, B]$.

ب - سمّ كل قطعتين متساويتي الطول، واذكر السبب.

ج - سمّ المستقيمتين المتوازيتين، واذكر السبب.

د - سمّ القطاعات الزاوية المتطابقة، واذكر السبب.



على المستقيم س ص، م هي منتصف $[P, P]$ و منتصف $[B, B]$. تحقق من ذلك. أ - بالتناظر حول م:

ماذا تسمي P و P-bar؟ B و B-bar. حدّد نظير كل من P، P-bar، B، B-bar. حدّد نظير القطعة $[P, B]$.

ما هو نظير المستقيم س ص؟

ب - سمّ كل قطعتين متساويتي الطول، واذكر السبب.

(٢) على الرسم التالي: P هي نظير P بالتناظر حول م



ارسم بدون استعمال الأطوال نظير المستقيم س ص بالتناظر حول م.

(٣) على الرسم التالي: P و P-bar هما نظيرا Q و Q-bar بالتناظر حول م.

(٥) م هي مركز التناظر، و [أب] قطعة مستقيم.

حدد نظير [أب] في كل من الأحوال التالية :

أ - م \neq [أب]، و م \in أب

ب - م \neq [أب]، و م \notin أب

ج - م \in [أب].

د - م = أ.

هـ - م منتصف [أب]. ماذا تقول عن م بالنسبة لـ

[أب] في هذه الحال.

(٦) أ، ب، ج، د أربع نقاط من المستوى.

أ - حدد النقاط المتناظرة مع أ، ب، ج، د حول نقطة م.

ب - ما هو الشكل المتناظر مع المضلع أبجد؟

ج - ما هو الشكل المتناظر مع الخط المضلع أبجد؟

(٧) أ، ب و ج د مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في نقطة م. س نقطة من المستوى.

أ - عيّن سَ نظير س بالتناظر حول المستقيم أ.

ب - عيّن سَ نظير سَ بالتناظر حول المستقيم ج.

ج - اثبت ان س و سَ متناظران بالتناظر حول النقطة م.

(٨) جد مراكز تناظر ما يلي :

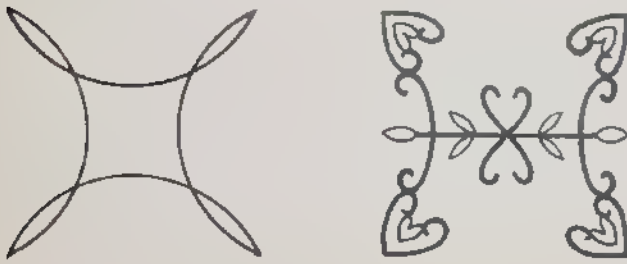
أ - قطعة المستقيم [أب].

ب - روح من القاط {ج، د}.

ج - المستقيم س ص.

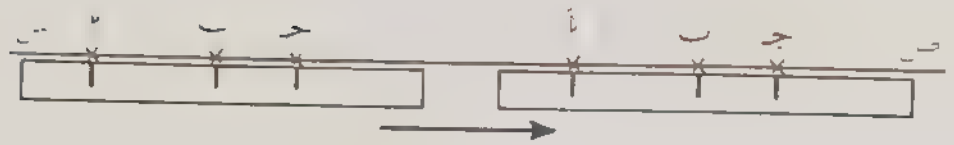
د - مستقيمين متقاطعين في ع.

(٩) جد مراكز تناظر الاشكال التالية :



الدرس الثاني : الانسحاب على مستقيم

(١) ماهية الانسحاب



■ ارسم مستقيماً، وسمّه س ص.

عيّن على المستقيم نقاطاً : P ، ب، ج،

ضع مسطرتك بمحاذاة المستقيم س ص، ثم عيّن عليها إشارات متقابلة مع النقاط : P ، ب، ج... كما على الشكل أعلاه.

حرّك المسطرة باتجاه واحد، على أن تلامس باستمرار المستقيم س ص. توقّف في وضع، وسمّ : P' ، ب'، ج' النقاط على س ص المقابلة للإشارات التي على المسطرة.

عندما سحبت المسطرة حوّلت النقاط : P ، ب، ج الى النقاط : P' ، ب'، ج'.

نسمّي العملية إنسحاباً. P' هي صورة P في هذا الانسحاب. كذلك ب'، ج' هما صورتا : ب و ج بالانسحاب نفسه. المستقيم س ص يسمى حامل الانسحاب.

والان : إذا سحبت المسطرة كي تعيدها إلى وضعها الأساسي، تكون قد

١. جمع النقاط ٢. ب. ح. إلى مواضعها الأساسية : ٢. ب. ج. فتكون
قد اتتت عملية سحب ح. يستى الإنسحاب المعاكس للإنسحاب
الأول

■ ح. ب. ح. لا. ب. ح.

نقطة ب. | ح. | صورة ب. ح. | ح. | . فهل تنصق هذه للملاحظة
على كل نقطة من | ح. | . وصورة ب. ح. ؟ حقق من ذلك .
سم صورة | ح. | . مجموعة صور نقط | ح. | للإنسحاب السابق . ما
هي صورة | ح. | ؟

■ قارن أطول تقصع على رسمه نقطون صورهما بالإنسحاب السابق . مد
نلاحظ ؟ ما تستنتج ؟

الإنسحاب هو تقايس . أي إن صورة كل قطعة مستقيم هي
قطعة مستقيم لها الطول نفسه .

٢) مقياس الإنسحاب



على المستقيم $س ص$ أربع نقاط $أ. ب. ج. د...$ أجرينا
انسحاباً على هذا المستقيم. وعيّننا النقطة $پ$ صورة $پ$ بهذا الانسحاب.

■ لاحظ في هذه الصورة بالانسحاب هو $س$
ستجد هذه الملاحظة في تعيين نقطتي $ب. ج. د...$ صورة لنقطة
 $ب. ج. د...$ بالانسحاب السابق

استعمل المبرمج مقياسه لقص $[أ. ب. ج. د...]$ و $[د. د]$
واذكر ما تلاحظه

استخدم هذه الملاحظة في تعيين صورة نقطة $م. ي$ بالانسحاب نفسه.
 $م$ هي المسافة بين أية نقطة على $س ص$ وصورتها في هذا الانسحاب.

لاحظت في النشاط السابق أن المسافة بين أية نقطة من المستقيم $س ص$.
وصورتها بالانسحاب معين هي مسافة ثابتة.
نسمي هذه المسافة مقياس الانسحاب أو مقدار الانسحاب.

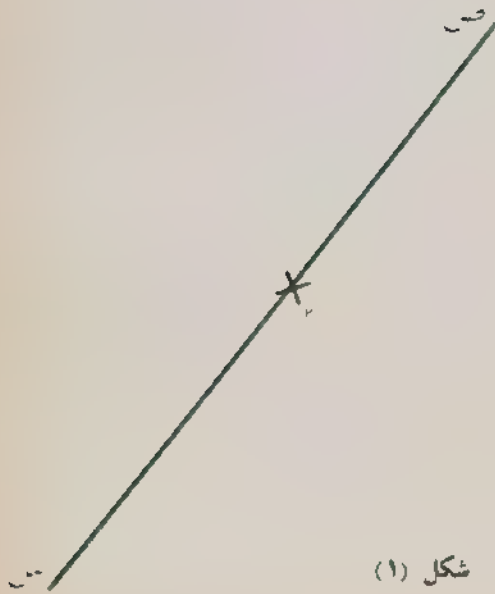
(٣) منحى الانسحاب

■ طُلب منك إجراء انسحاب على المستقيم $س ص$ (شكل ١). مقياسه
٣ سم.

هل تستطيع تعيين النقطة $پ$ صورة $أ$ في هذا الانسحاب؟ إذا كان
حوالك «عم»، فاسترح كيف حصلت على $أ$. هل $أ$ تنتمي إلى
 $أ. ب. ج. د...$ إلى $أ. ب. ج. د...$ ؟

إذا كان حوالك «لا»، فاذكر ماذا ينقص حتى تستطيع تحديد $أ$ بالتمام.

شكل (١)



عنده يعرف مقياس سحب على مستقيم، فإننا لا نستطيع تحديد
الانسحاب بل نفقد معرفة منحى هذا الانسحاب. وهذا المنحى هو واحد
من اتجاهين على مستقيم من ص.
من الفقرتين (٢ و ٣) نستنتج:

- الانسحاب على مستقيم معين يحدده عنصران:
- (١) مقياس الانسحاب. وهو المسافة بين أية نقطة على
المستقيم وصورتها.
 - (٢) منحى الانسحاب. وهو واحد من اتجاهي المستقيم.

تمارين

١) س ص و ع ط مستقيمان متقاطعان في نقطة م .
بريد احراء الانسحاب مقياسه ٤ سم .

أ - ماذا يجب أن تعرف حتى تحقق الانسحاب؟

ب حامل الانسحاب هو ع ط ، فهل تستطيع تعيين صورة م في هذا الانسحاب؟

ج ما هي صورة م بانسحاب على ع ط مقياسه ٤ سم ومنحاه اتجاه نصف المستقيم [م ط؟

د ما هي صورة م بانسحاب على س ص مقياسه ٤ سم ، ومنحاه اتجاه نصف مستقيم [م س؟

٢) س ص و ع ط مستقيمان متقاطعان في نقطة م .
كم اسحباً على كل مستقيم ، وبمقياس معطى ، تستطيع أن
تحدد؟

ما هي النقطة م بالنسبة للمضلع الذي رؤوسه هي صور م
في هذه الانسحابات؟

الدَّرْسُ الثَّالِثُ : التَّجَاهَاتُ

(١) ماهية المتجه

عندما نتكلم عن انسحاب محدد على مستقيم، يجب أن نحدد ما يلي :

أ - مقياس الانسحاب وهي المسافة بين نقطة وصورتها.

ب - منحى الانسحاب وهو الاتجاه من نقطة نحو صورتها.

نختصر عادة ذلك في كتابة رمزية على الشكل التالي : إذا كانت النقطة ب صورة النقطة أ بالانسحاب، نكتب : الانسحاب \overrightarrow{AB} .

فيكون : مقدار الانسحاب $|\overrightarrow{AB}|$ ، اتجاه الانسحاب من أ نحو ب.

الكتابة الرمزية \overrightarrow{AB} تسمى متجهًا:

أ هي أصل المتجه

ب هي طرف المتجه

المستقيم \overrightarrow{AB} هو حامل المتجه

أ $|\overrightarrow{AB}|$ هو مقياس المتجه.

الاتجاه من أ نحو ب هو منحى المتجه.

ونمثل المتجه \overrightarrow{AB} بقطعة مستقيم، طرفها أ وب ، ، واضعين سهمًا عند طرف المتجه ب ، كما هو مبين على الشكل (١).

(٢) تساوي متجهين

■ أ ، ب ، هـ ، ط ، ي ، د نقاط على المستقيم س ص (شكل ٢). نحقق من أن : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

كثرت الرموز. وعليّ تذكرها :

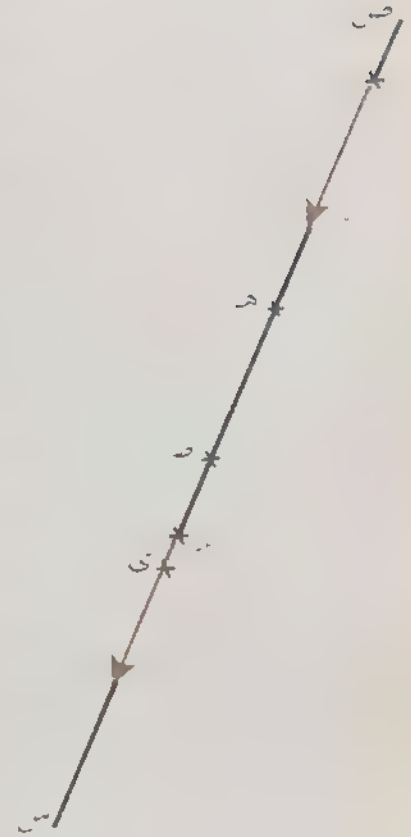
أ ب : مستقيم
 [أ ب] : قطعة مستقيم
 أ ب : نصف مستقيم
 أ ب | : طول قطعة مستقيم
 \overrightarrow{AB} : متجه



شكل (١)

من أجل سحب \vec{AB} في حدود \vec{AB} ←
 من أجل سحب \vec{AB} في حدود \vec{AB} ←
 من أجل سحب \vec{AB} في حدود \vec{AB} ←
 من أجل سحب \vec{AB} في حدود \vec{AB} ←
 من أجل سحب \vec{AB} في حدود \vec{AB} ←

صورة \vec{AB}	صورة \vec{AB}	صورة \vec{AB}	صورة \vec{AB}



شكل (٢)

ماد نلاحظ على الحدود نسبق بالنسبة لـ \vec{AB} كل نقطة - لاسحبين
 هل تنطق ملاحظتك على أية نقطة من س ص ؟
 لاحظت في النشاط السابق أن المتجهين \vec{AB} و \vec{CD} يحددان الانسحاب
 نفسه. نقول : إن المتجهين متساويان ونكتب : $\vec{AB} = \vec{CD}$.

نقول عن متجهين : \vec{AB} و \vec{CD} إنها متساويان . عندما
 يحددان الانسحاب نفسه . وعند ذلك يكون لهما :
 (١) المنحى نفسه .
 (٢) المقياس نفسه . أي $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.
 ونكتب : $\vec{AB} = \vec{CD}$

* حدد على الشكل (٢) منحىها
 متساوي لـ \vec{AB} و \vec{CD}

(٣) تركيب الانسحابات وجمع المتجهات

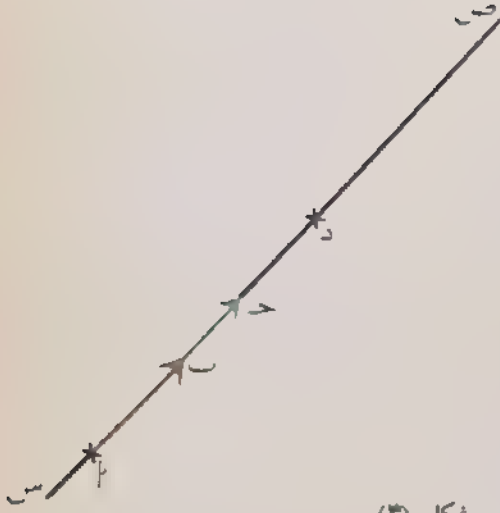
على المستقيم $س ص$ نقوم بإجراء انسحاب أول محدد بالمتجه $\vec{أ ب}$ (شكل ٣)، ثم نقوم بإجراء انسحاب ثان محدد بالمتجه $\vec{ب ج}$.

■ عيّن صورة $د$ بالانسحاب الأول. وسمّها $د'$.

عيّن صورة $د'$ بالانسحاب الثاني وسمّها $د''$.

ما هي صورة $د$ النهائية بالانسحابين المتتاليين؟

لو أجرينا منذ البدء الانسحاب المحدد بالمتجه $\vec{أ ج}$ ، فما هي عند ذلك صورة $د$ في هذا الانسحاب؟ ماذا تلاحظ؟



شكل (٣)

لاحظت في النشاط السابق أن الصورة الناتجة عن $د$ من تتابع الانسحابين المحددين بالمتجهين: $\vec{أ ب}$ و $\vec{ب ج}$ ، هي نفسها صورة $د$ بالانسحاب المحدد بالمتجه $\vec{أ ج}$.

نقول: إن الانسحاب الأخير المحدد بالمتجه $\vec{أ ج}$ هو حاصل تركيب الانسحابين المتتاليين المحددين بالمتجهين: $\vec{أ ب}$ و $\vec{ب ج}$ ، ونكتب:

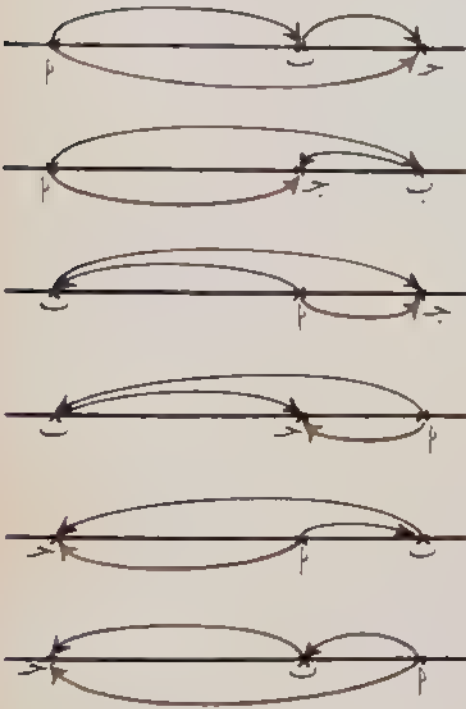
$$\vec{أ ب} + \vec{ب ج} = \vec{أ ج}$$

ونقول: إن المتجه $\vec{أ ج}$ هو حاصل جمع المتجهين: $\vec{أ ب}$ و $\vec{ب ج}$. وبيّن لنا الشكل (٤) أن حاصل جمع متجهين: $\vec{أ ب} + \vec{ب ج}$ ، هو المتجه $\vec{أ ج}$ ، أيّا كان وضع النقاط: $أ$ ، $ب$ ، $ج$ على المستقيم.

(٤) المتجه المعاكس لمتجه معطى

■ أجرينا الانسحاب المحدد بالمتجه $\vec{أ ب}$ على الشكل (٥)

ما هي صورة $أ$ في هذا الانسحاب؟



شكل (٤)

إذا كان \overleftarrow{AB} هو المتجه الذي يحدد انسحاباً معيناً. فإن الانسحاب المعاكس يحدده المتجه \overleftarrow{B} . ونسميه المتجه المعاكس للمتجه \overleftarrow{AB} .

(٥) المتجه الصفري

■ قبل على شكل (٦) \overleftarrow{AB} حـ بالانسحاب يحدد المتجه \overleftarrow{AB} .
وسمها حـ.

قبل حـ \overleftarrow{AB} بالانسحاب يحدد متجه \overleftarrow{B} ٢. وسمها حـ
قرب حـ و حـ مد واحد

الانسحاب الحاصل من تركيب الانسحابين المحددين بمتجهين متعاكسين هو الانسحاب الذي يحافظ على كل نقطة من المستقيم. المتجه الذي يحدد هذا الانسحاب يسمى المتجه الصفري. ويرمز له بالرمز: $\overleftarrow{0}$ ، وهو يساوي أيضاً $\overleftarrow{0}$. أيًا كانت النقطة O .

بناء على ما سبق نستطيع أن نكتب:

$$\overleftarrow{AB} + \overleftarrow{B} = \overleftarrow{AP} = \overleftarrow{0}$$

نرمز. بالرمز $(-\overleftarrow{AB})$ للمتجه \overleftarrow{B} ونكتب:

$$\overleftarrow{B} = -\overleftarrow{AB}$$


شكل (٥)



شكل (٦)

تمارين

(١) P, B, J, D وهـ خمس نقاط على المستقيم
س. ص.

ط هي صورة هـ بالانسحاب المحدد بـ P .

ي هي صورة ط بالانسحاب المحدد بـ J .

ك هي صورة ي بالانسحاب المحدد بـ D .

أ - أرسم المستقيم س. ص، وعيّن عليه النقاط :
 P, B, J, D, H, T, Y, K .

ب- ما هي صورة هـ بالانسحاب المحدد بـ P ؟

ج- ما هي صورة هـ بالانسحاب المحدد بـ
($P+B$)؟

د - ما هي صورة هـ بالانسحاب المحدد بـ D ؟

هـ - أكمل المساواة التالية :

$$(P+B+J) + JD = \dots + JD$$

$$= \dots$$

(٢) تحقق من أنه أيّا كان وضع النقاط P, B, J, D ،
فإن :

$$(P+B+J) + JD = PD + (B+J) + JD$$

(٣) النقاط : P, B, J, D, H, T تتوالى، وبهذا

الترتيب على المستقيم س. ص، وحيث نعرف أن المسافة بين
نقطتين متتاليتين هي ٣ سم.

أ - عيّن صور P, B, J, D هـ بالانسحاب المحدد
بـ J .

ب- عيّن صور P, B, J, D هـ بالانسحاب
المحدد بالمتجه J .

ج - سمّ ثلاث متجهات مساوية لـ J .

د - حدّد متجهًا مساويًا لـ : $P+B+J$.

(٤) P, B, J ثلاث نقاط على المستقيم س. ص. جـ هي
صورة جـ بالانسحاب المحدد بـ P .

أ - عيّن جـ على الرسم.

ب- حدّد على الرسم، متجهًا مساويًا للمتجه P .

ج - استخدم الحرفين جـ و جـ لكتابة متجه يحدّد
الانسحاب الذي يجعل P صورة لـ B .

د - ماذا نقول عن المتجهين P و جـ؟

(٥) P, B, J, D أربع نقاط على المستقيم س. ص،
بحيث إن : $P=B+J+D$.

أ - أثبت أن النقطة H ، منتصف $[B+J]$ ، هي أيضًا
منتصف $[PD]$.

ب- أثبت أن $B=D+J$.

الفصل الحادي عشر :

الأعداد الصحيحة

- الدرس الأول : مائة العدد الصحيحة
- الدرس الثاني : جمع الأعداد الصحيحة وطرحها
- الدرس الثالث : ترتيب الأعداد الصحيحة
- الدرس الرابع : ضرب العدد الصحيح وقسمته

الدَّرْسُ الأول : ماهية الأعداد الصحيحة

(١) لعبة الأعداد الملونة

■ املاً تمارعت فيما يلي :

$$..... = ٤ + ٣$$

$$..... = ٧ + ٦ \text{ خسارة}$$

$$..... = ٧ + ٣ \text{ خسارة}$$

$$..... = ٨ + ٢ \text{ خسارة}$$

$$..... = ٤ + ٤ \text{ خسارة}$$

$$..... = ٣ + ٣ \text{ خسارة}$$

- ٢- نرسم إلى ربح عدد ما بالعديد نفسه ملوناً بالأخضر (مثلاً : $٤ = -$) ، ونرسم إلى خسارة عدد ما بالعدد نفسه ملوناً بالبنّي (مثلاً : خسارة $٤ = ٤$) . كما نرسم إلى ربح صفر وخسارة صفر بالعدد (٠) .

■ املاً تمارعت فيما يلي :

$$..... = ٧ \text{ ربح} \quad = ٠ \quad - \text{ ربح} ٠$$

$$..... = ١٠ \quad = ٠ \quad = \text{خسارة} ١٠$$

$$..... = \text{خسارة} ٤ \quad = ٣ \quad - \text{ ربح} ٤$$

■ تأكد من صحة الحسب لتأليه وحَوِّد إلى حسب بالأعداد ملونة .

لحمل بالأعداد الملونة

حمل - كبرت

$$\begin{aligned}
 & 11 - 5 - 2 \quad \text{ربح 6 - ربح 5 - ربح 11} \\
 & \quad \quad \quad \text{خسارة 7 - خسارة 9 - خسارة 16} \\
 & \quad \quad \quad \text{ربح 8 + خسارة 11 - خسارة 3} \\
 & \quad \quad \quad \text{ربح 11 + خسارة 8 = ربح 3} \\
 & \quad \quad \quad \text{خسارة 6 + ربح 6 = خسارة 0} \\
 & \quad \quad \quad \text{ربح 8 + خسارة 8 - ربح 0}
 \end{aligned}$$

■ حد قيمة من كعدد من حيث تكبر حسن تية صحيحة

قيمة من

الجميل

$$\begin{aligned}
 & \text{س} + 5 - 0 \\
 & \text{س} + 1 - 0 \\
 & \text{س} + 8 - 3 \\
 & \text{س} + 1 - 13 \\
 & \text{س} + 4 - 1 \\
 & \text{س} + 13 - 5
 \end{aligned}$$

■ اكمل ما يلي

$$5 = 5 + 8 + 8 - 13 + 1$$

$$..... = ١ + + ٥ - ٨ + ١٣$$

$$..... - ١١٤ + ١١٠$$

$$..... = ٩٧ + ١٣٥$$

الربح زيادة. والخسارة نقصان. فلو رمزنا إلى العدد الملون ٤ بالرمز (+٤)، وإلى العدد الملون ٣ بالرمز (-٣)، لأصبح لدينا مثلاً:

$$(١+) = (٣-) + (٤+)$$

(+) هي إشارة الربح. و (-) هي إشارة الخسارة.

■ اجمع الأعداد الملونة متتية. ثم استبدل الألوان بالإشارة مدسة (- أو +):

الجمل بالاعداد الملونة	الجمل بالاشارات
١٢ + ٧ - ٥	(١٢+) + (٧-) = ٥+
٦ + ٨ -	(٦+) + (٨-) = -
٢٠٠ + ١٩٧٧ -	
٥٠ + ٧٠ -	
٢١٦ + ١٨٣ -	
٤٥ + ٤٥ -	
٢٠٠ + ٣٠٠ -	
٧٥ + ٥٠ -	
٤٠ + ٦٠ -	
٣٥ + ٣٥ -	
٧ + ١ -	

■ حد قيمة $\sum_{k=1}^n k$ كعدد طبيعي حيث تكون الحاصل الثانية مسجحة

الجملة	قيمة $\sum_{k=1}^n k$ مسبوقة بإشارة
$\sum_{k=1}^5 k$	$\sum_{k=1}^5 k$
$\sum_{k=1}^3 k$	$\sum_{k=1}^3 k$

■ أكمل ما يلي

$$\begin{aligned} 7 &= (7-) + (8-) + (8+) = (15-) + (8+) \\ \dots &= (6+) + \dots + (7-) = (6+) + (13-) \\ &\dots = (32-) + (77+) \\ &\dots = (97-) + (55+) \end{aligned}$$

(٢) الحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الكلية لـ

■ حد مجموعة حل المعادلة $3x + 2 = 10$ من

في مجموعة التعويضات $\{0, 1, 2, 3\}$

حد مجموعة حل المعادلة نفسها في مجموعة التعويضات

ت = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

■ حول في حل المعادلة $3x + 5 = 10$ من

من $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

ما هي مجموعة حل هذه المعادلة في لـ؟

وَجَدْتَ فِي الْقِسْمِ الْأَوَّلِ مِنَ النَّشَاطِ السَّابِقِ أَنَّ مَجْمُوعَةَ حُلِّ الْمَعَادِلَةِ :
 $3س + 2 = 10$ فِي مَجْمُوعَةِ التَّعْوِيزِ : $\{ 0, 1, 2, 3 \}$ هِيَ
 الْمَجْمُوعَةُ الْخَالِيَةُ \emptyset . وَوَجَدْتَ كَذَلِكَ أَنَّ مَجْمُوعَةَ حُلِّ الْمَعَادِلَةِ نَفْسُهَا، إِذَا
 وَسَّعْنَا مَجْمُوعَةَ التَّعْوِيزِ لِتَصْبِحَ $\{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ ، هِيَ $\{ 4 \}$.
 وَبِالتَّالِي، فَإِنْ تَوَسَّعَ مَجْمُوعَةُ التَّعْوِيزِ مَكَّنَّا مِنْ إِيجَادِ حُلٍّ لِمَعَادِلَةٍ لَمْ يَكُنْ
 لَهَا حُلٌّ.

فِي الْقِسْمِ الثَّانِي مِنَ النَّشَاطِ وَجَدْتَ، بِاسْتِعْمَالِكَ خَصَائِصِ الْعَمَلِيَّاتِ عَلَى
 الْأَعْدَادِ أَنَّ الْمَعَادِلَةَ $3س + 5 = 2س + 1$ تَكَاثُفُ الْمَعَادِلَةَ $س + 4 = 0$.
 وَوَجَدْتَ أَنَّ مَجْمُوعَةَ حُلِّ هَذِهِ الْمَعَادِلَةِ فِي \mathbb{Z} هِيَ الْمَجْمُوعَةُ الْخَالِيَةُ \emptyset .
 لِذَلِكَ سَوْفَ نَوْسِّعُ مَجْمُوعَةَ الْأَعْدَادِ الْكَلِّيَّةِ \mathbb{Z} ، مُحَافِظِينَ عَلَى خَصَائِصِ
 عَمَلِيَّاتِ الْجَمْعِ وَالضَّرْبِ، بِحَيْثُ نَحْصِلُ عَلَى مَجْمُوعَةٍ جَدِيدَةٍ مِنَ الْأَعْدَادِ،
 نَجِدُ ضَمْنَهَا حُلُولًا لِلْمَعَادِلَةِ : $س + 4 = 0$ ، وَكَذَلِكَ بِالنِّسْبَةِ لِجَمِيعِ الْمَعَادِلَاتِ
 مِنْ نَوْعِ : $س + ٢ = ٠$ (حَيْثُ $٢ \in \mathbb{Z}$).

٣) الْأَعْدَادُ الصَّحِيحَةُ

نَرْمِزُ بِالرَّمْزِ $(١-)$ لِلْعَدَدِ الَّذِي يَحْقُقُ $س + ١ = ٠$ وَنَكْتُبُ : $(١-) = ١ + ٠$.
 نَرْمِزُ بِالرَّمْزِ $(٢-)$ لِلْعَدَدِ الَّذِي يَحْقُقُ $س + ٢ = ٠$ وَنَكْتُبُ : $(٢-) = ٢ + ٠$.
 نَرْمِزُ بِالرَّمْزِ $(٣-)$ لِلْعَدَدِ الَّذِي يَحْقُقُ $س + ٣ = ٠$ وَنَكْتُبُ : $(٣-) = ٣ + ٠$.
 وَعَلَى الْعَمُومِ إِذَا كَانَ $٢ \in \mathbb{Z}$ ، فَالرَّمْزِ $(٢-)$ هُوَ رَمِزُ الْعَدَدِ الَّذِي يَحْقُقُ
 $س + ٢ = ٠$ وَ نَكْتُبُ $(٢-) = ٢ + ٠$.

الأعداد : $٠, -١, -٢, -٣, -٤, \dots$ تسمى الأعداد الصحيحة
 السالبة ؛ ونرمز لمجموعة هذه الأعداد بالرمز \mathbb{Z}^- .
 الأعداد الكليّة : $٠, ١, ٢, ٣, ٤, \dots$ تسمى بالمقارنة الأعداد
 الصحيحة الموجبة، ويرمز لمجموعتها بالرمز : \mathbb{Z}^+

* ما هو العدد س الذي يحقق

$$س + ٤ = ٠$$

ما هو العدد ص الذي يحقق

$$١٣٤ + ص = ٠$$

أي إن صـ - ك

ولتأكيد على أن العدد ٣ مثلاً، هو عدد صحيح موجب، نكتبه على الشكل: (٣+)، فيصبح لدينا بالتالي:

$$٠ = (٣+) + (٣-)$$

المجموعة صـ = صـ+ ∪ صـ- تسمى مجموعة الأعداد

الصحيحة وهي:

$$صـ = \{ \dots, ٣+, ٢+, ١+, ٠, ١-, ٢-, ٣-, \dots \}$$

المجموعة صـ هي بالطبع مجموعة غير منتهية.

ك > صـ

(٤) نظير عدد صحيح

كل عدد صحيح موجب يقابله عدد صحيح سالب، بحيث إن مجموع العددين يساوي صفراً. مثلاً:

$$٠ = (٣-) + (٣+)$$

نسمي العدد الصحيح السالب (٣-) نظير العدد الصحيح الموجب (٣+)، ونسمي كذلك العدد الصحيح الموجب (٣+) نظير العدد الصحيح السالب (٣-)، وكل من العددين: (٣+) و (٣-) يسمى نظير الآخر.

ونرمز عادة لنظير عدد: س \ni صـ، بالرمز (-س) وهكذا، فإن:

$$٣- = (٣+) - \text{ لأن: نظير } ٣+ = ٣-$$

$$٣+ = (٣-) - \text{ لأن: نظير } ٣- = ٣+$$

وكذلك:

$$٤- = (٤+) - ; ٢+ = (٢-) -$$

$$١٠+ = (١٠-) - ; ٩- = (٩+) -$$

* جد نظير كل من الأعداد:

$$٠.٥ - , ١٧- , ٠.١ + , ٢- , ١٠.١ -$$

$$١ \ni ك \text{ و } ٢ \ni ك)$$

نظير العدد صفر هو العدد صفر ، لأن : $0 = 0 + 0$

٥) القيمة المطلقة لعدد صحيح

العدد الكلي ٨ يسمى القيمة المطلقة للعددين الصحيحين :

$(٨+)$ و $(٨-)$ ، ونكتب :

$$٨ = |٨+| \text{ و } ٨ = |٨-|$$

الرمز « | » هو رمز القيمة المطلقة.

$$\text{وكذلك } ٣ = |٣+| = |٣-|$$

■ املاً الفراغات فيما يلي :

$$١٤+ = \dots\dots\dots ، |١٤-| \dots\dots\dots$$

جد قيم $|٣+|$ و $|٣-|$ ، إذا كان :

$$٣ = |٣+| \text{ و } ٣ = |٣-|$$

■ هل الكتابات التالية صحيحة ؟ ولماذا ؟

$$١٤+ = |١٤+| \text{ و } ١٤- = |١٤-|$$

تحقق بإعطائك قيمًا مختلفة للعدد الصحيح P من أن :

$$P = |P| \text{ إذا كان } P \text{ موجباً.}$$

$$-P = |P| \text{ إذا كان } P \text{ سالباً.}$$

نستطيع إذن تعريف القيمة المطلقة لعدد صحيح P كما يلي :

$$P = |P| \text{ إذا كان } P \text{ موجباً.}$$

$$-P = |P| \text{ إذا كان } P \text{ سالباً.}$$

$$0 = |P| \text{ إذا كان } P = 0 \text{ صفرًا.}$$

٦ ملاحظة عامة

في الدرس الثالث من الفصل التاسع (مسائل حسابية) لم نجد في مجموعة الأعداد الكلية حلاً للمسألة :

« أب عمره ٣٨ سنة ، وعمر ابنه ١٤ سنة . بعد كم سنة يصبح عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن ؟ » .

رمزنا في هذه المسألة بالحرف س لعدد السنوات المطلوبة ، فحصلنا على المعادلة : $3(14 + س) = س + 38$.

وكذلك حصلنا على المعادلة المكافئة : $س = ٢ + ٠$.

واستنتجنا عدم وجود حلول للمسألة في \mathbb{N} .

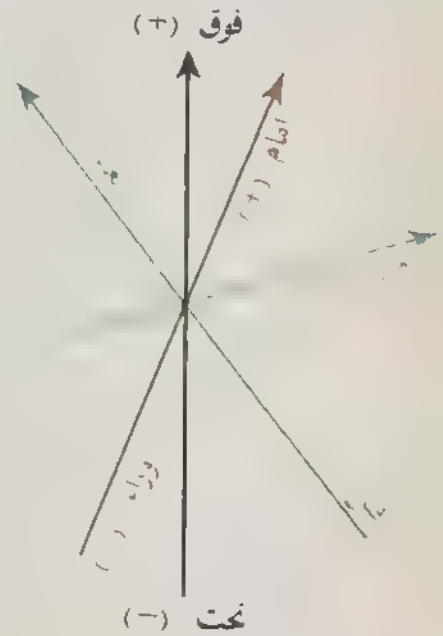
ولو افترضنا أن العمليات التي قمنا بها صحيحة في مجموعة الأعداد الصحيحة ، لحصلنا على حل للمعادلة في \mathbb{Z} ، وهو : $س = \text{نظير العدد } ٢ = -٢$.

وهذا معناه أنه « قبل » سنتين كان عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن . وهكذا نرى أننا تمكنا من حل المسألة في مجموعة الأعداد الصحيحة بينما كنا قد عجزنا عن حلها في مجموعة الأعداد الكلية .

لاحظنا حتى الآن دور الأعداد الصحيحة في التعبير عن أمور حياتية متعاكسة ، والأمثلة على ذلك كثيرة ، منها :

الأعداد الموجبة تمثل ربحاً ، والأعداد السالبة تمثل خسارة ،
الأعداد الموجبة تمثل تقدماً نحو الأمام ، والأعداد السالبة تراجعاً نحو
الوراء ،

الأعداد الموجبة تمثل فترة من الزمن اللاحق ، والأعداد السالبة فترة من
الزمن السابق .



تمارين

(١) مَرِّبِ الصَّحِيحَ وَاحْطَأْ فِي يَلِي :

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{N}$$

(٢) احسب القيمة المطلقة لكل من الأعداد الصحيحة

التالية :

$$|4-| \quad |5| = \dots$$

$$|3+| \quad |124+| = \dots$$

$$|0| \quad |317-| = \dots$$

(٣) حدّد نظير كل من الأعداد الصحيحة التالية :

$$\text{نظير } (5-) = \dots \quad \text{نظير } (0-) = \dots$$

$$\text{نظير } (6+) = \dots \quad \text{نظير } (100+) = \dots$$

(٤) حدّد قيم العدد الصحيح س في كلٍ من الحالات

التالية :

$$7 \mid \text{س}$$

$$0 \mid \text{س}$$

$$24 = \text{س}$$

(٥) احسب م يلي

$$-(4) - \dots$$

$$-(6+) \dots$$

$$-(0) - \dots$$

(٦) احسب م يلي :

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

$$|16+| + |4+| + |16+| = \dots$$

الدّرس الثّاني : جمع الأعداد الصحيحة وطرحها

(١) الجمع

انطلقنا في الدرس السابق ، لتعريف مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} ، مما يلي :

أ- توسيع مجموعة الأعداد الكلّية \mathbb{Z} ، بحيث إن كل عدد ينتمي إلى \mathbb{Z} يقابله نظير ، وهو عدد ينتمي إلى \mathbb{Z} .

ب- أن العمليات في \mathbb{Z} تقابلها عمليات في \mathbb{Z} لها الخصائص نفسها ، وتتوافق معها بالنسبة للأعداد الموجبة .

وسنعمد على ذلك للتعرف على حاصل جمع عددين صحيحين ، عارضين على هامش الصفحة العمليات نفسها التي أجريناها على الأعداد الملونة المعبرة عن الربح والخسارة .

■ تابع إذن العمليات على الأعداد في العمود الأول ، وقارنها بالعمليات على الأعداد الملونة على الهامش ، والتي تعبر عن ربح وخسارة ، ومن ثم تابع العمليات على القيم المطلقة في العمود الثاني .

برّر في كل مرة الخطوات ، واعد الكرة مختارًا أعدادًا أخرى .

جمع عددين موجبين :

$$8 = 3 + 5$$

$$\begin{array}{rcll} & = & |3+| + |5+| & \vdots & = & (3+) + (5+) \\ & & 3 & + & 5 & \vdots & = & 3 & + & 5 \\ & & & & 8 & \vdots & = & & & 8 \\ & & & & |8+| & \vdots & & & & 8+ \end{array}$$

خصائص الجمع في \mathbb{Z} هي :

(١) خاصية الإبدال :

$$a + b = b + a$$

(٢) خاصية التجميع :

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$

(٣) خاصية الصفر كعنصر محايد :

$$a + 0 = 0 + a = a$$

(٤) خاصية النظير :

$$0 = a + (-a) = (-a) + a$$

(٥) جمع عددين موجبين في \mathbb{Z}

يتوافق مع جمعها كعددين كليين .

جميع عددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح موجب
قيسته المطلقة تساوي مجموع قيمتيهما المطلقتين.

جمع عددين يختلفان بالإشارة :

الحالة الأولى : القيمة المطلقة للعدد الموجب أكبر من القيمة المطلقة للعدد السالب :

$$\begin{array}{r} 6 + (-2) \\ 6 - 2 \\ 4 \end{array}$$

$$4 = 6 + (-2)$$

الحالة الثانية : القيمة المطلقة للعدد السالب أكبر من القيمة المطلقة للعدد الموجب :

$$\begin{array}{r} 12 + (-5) \\ 12 - 5 \\ 7 \end{array}$$

$$7 = 12 + (-5)$$

مجموع عددين صحيحين يختلفان بالإشارة هو عدد صحيح
إشارته هي إشارة أكبرهما بالقيمة المطلقة ، وقيمته المطلقة
هي حاصل طرح قيمتيهما المطلقتين.

جمع عدد سالبين :

$$V = V + \Delta$$

$$= (V) + (A)$$

10 , 10 , 10 , 10 ,

(10) : (10) (1) : (1)

$$= |y-1| + |x-1|$$

$$= (10^-) + [(V^+) + (\Lambda^+)] + (V^-) + (\Lambda^-)$$

$$-V + A$$

$$= (\psi_0^-) + [(\psi^+) + (\psi^-)] + [(\lambda^+) + (\lambda^-)]$$



$$= (10^-) + \dots$$

150-1

40

مجموع عددين صحيحين سالبين هو عدد صحيح سالب
قيمتها المطلقة تساوي مجموع قيمتيهما المطلقتين.

$$28 + = (20 +) + (13 +)$$

$$27 = (9-) + (18-)$$

عددان صحيحان هما الإشارة نفسها
يتألفان بالجمع .

$$7+ = (\Lambda-) + (14+)$$

$$1\bar{2} = (V+) + (V1-)$$

عددان صحيحان يختلفان بالإشارة
يتصارعان بالجمع والغلبة لصاحب
القيمة المطلقة الأكبر.

(٢) الطرح

تعرفنا على عملية الطرح في \mathbb{Z} كعملية عكسية للجمع ؛ فالجمل التالية مثلاً، هي جمل متكافئة :

$$Y = 0 - 12 \text{ ; } 0 = Y - 12 \text{ ; } 12 = 0 + Y$$

وبالطريقة ذاتها نعرّف عملية الطرح في مجموعة الأعداد الصحيحة كعملية عكسية للجمع.

مثلاً :

$$10+ = (V+) + (\Lambda+)$$

نسمي العدد (٨٠) الفرق بين العددين (١٥٠) و (٧٠) . ونكتب

$$٨٠ = (١٥٠) - (٧٠)$$

نسمي هذه العملية طرحاً. والإشارة $(-)$ هي إشارة الطرح. ونقرأ « ناقص »

أما العدد (٧٠) . فهو الفرق بين العددين (١٥٠) و (٨٠) . ونكتب

$$٧٠ = (١٥٠) - (٨٠)$$

* نحب ما يلي

$$\begin{aligned} &= (٣٠) - (٧٠) \\ &= (٣-) - (٧٠) \\ &= (٣٠) - (٧-) \\ &= (٣-) - (٧-) \end{aligned}$$

٣) الطرح وجمع النظير

■ لاحظ العمليات التالية. وأكملها. وقارن بين عمليتي الطرح وجمع النظير:

عملية جمع النظير

عملية الطرح

$$١- - (٦-) + (٥٠)$$

$$١- - (٦٠) - (٥٠)$$

$$\text{لأن: } ٥٠ - (٦٠) - (١-) = ١-$$

$$١٠ - - (٨٠) - (٧-)$$

$$١- - (٨-) - (٧٠)$$

$$\text{لأن: } ٧ - (٨٠) + (١٠) = ١-$$

$$٣- - (٢٠) - (١٠)$$

$$\text{لأن: } \dots\dots\dots$$

$$٤٠ - (٣٠) - (١٠)$$

$$\text{لأن: } \dots\dots\dots$$

لاحظت في النشاط السابق أنك تستطيع إبدال عملية طرح عدد من عدد آخر بعملية جمع نظيره إلى هذا العدد الآخر.

$$p - (-b) + p = p - p$$

حاصل طرح عدد من عدد آخر هو حاصل جمع نظيره هذا العدد إلى العدد الآخر.

تمارين

(١) إجمع الأعداد الصحيحة التالية :

$$\begin{aligned} \dots &= (4+) + 0 \quad ; \quad \dots = (3-) + (5+) \\ \dots &= 0 + (5-) \quad ; \quad \dots = (9-) + (7-) \\ &= (100-) + (216+) \quad ; \quad \dots = (5+) + (4-) \\ &= (1000-) + (216+) \quad ; \quad \dots = (29-) + (19+) \\ &= (213-) + (213+) \quad ; \quad \dots = (58-) + (28+) \\ &= (p+) + (p-) \quad ; \quad \dots = (13+) + (137+) \end{aligned}$$

(٢) أجز العمليات التالية ذهنيًا :

$$\begin{aligned} \dots &= (1-) + (8+) + (7-) \\ \dots &= (123-) + (19-) + (123+) \\ \dots &= (14-) + (4+) + (24-) \\ \dots &= (30-) + (20-) + (10+) \end{aligned}$$

(٣) ازداد ما يملكه محمود ٢٥ ريالاً، ثم نقص ٤٧ ريالاً، ثم نقص ٣٦ ريالاً، ثم ازداد ٧٥ ريالاً.

عبر بالأعداد الصحيحة عما حصل لنقود محمود، ثم مثل ما سبق بعملية جمع على الأعداد الصحيحة، وحدد النتيجة.

(٤) صعد كمال ٦ درجات على سلم المبنى، ثم صعد ٣ درجات، ثم نزل ١٦ درجة، ثم نزل ٣ درجات، ثم صعد ١٠ درجات.

عبر بالأعداد الصحيحة عما فعل كمال، واحسب النتيجة.

(٥) تقدمت إلى الأمام ١٣٣ خطوة ثم تراجعتم إلى الوراء ٨٠ خطوة، ثم تقدمت ١٧ خطوة، ثم تراجعتم ٧٧ خطوة. عبر عن ذلك بالأعداد الصحيحة واحسب نتيجة ما قمت به.

(٦) اطرح الأعداد الصحيحة التالية :

$$\begin{aligned} &= (7-) - (14+) \\ &= (8-) - (6-) \\ &= (9+) - (4-) \\ &= (11+) - (5+) \\ &= (7+) - (7-) \\ &= (6-) - (9-) \\ &= (11+) - (22-) \\ &= (22+) - (11-) \\ &= (5+) - (15+) \\ &= (8+) - (8+) \\ &= (8-) - (8+) \end{aligned}$$

(٧) جد قيمة المجهول (س) في كل مما يلي :

$$\begin{aligned} 9- &= (6+) \quad \text{س} - \\ 8+ &= (14-) \quad \text{س} - \\ p- &= p \quad \text{س} - \\ 17- &= (9-) + \text{س} \\ 17+ &= (17+) + \text{س} \\ p &= p \quad \text{س} + \end{aligned}$$

الدرس الثالث : ترتيب الأعداد الصحيحة

(١) مبدأ مقارنة الأعداد الصحيحة

في مجموعة الأعداد الكلية ، $(٩ < ٧)$ تعني أن عملية الطرح $(٩ - ٧)$ ممكنة ، وأن $(٩ - ٧ < ٠)$.
وعلى العموم نقول :

$$\begin{aligned} &٧ < ٩ \\ &\text{تكافئ} \\ &٩ - ٧ < ٠ \end{aligned}$$

إن العدد الصحيح ٧ هو أكبر من العدد الصحيح ٩ ،
ونكتب : $٧ < ٩$ ، إذا كان $(٩ - ٧)$ عددًا صحيحًا
موجبًا أكبر من الصفر. ونقول أيضًا : إن ٧ هو أصغر
من ٩ .

(٢) ترتيب الأعداد الصحيحة الموجبة

الأعداد الصحيحة الموجبة هي الأعداد الكلية ، وقد رتبنا على
الشكل :

$$٠ < ١ < ٢ < ٣ < ٤ < \dots$$

نلاحظ إذن :

كل عدد صحيح موجب هو أكبر من الصفر. تكبر
الأعداد الصحيحة الموجبة كلما كبرت قيمتها المطلقة.

(٣) ترتيب الأعداد الصحيحة السالبة

■ حسب :

$$- (٨) =$$

قارن عددين (٠) و $-(٨)$. واملأ الفراغ فيما يلي :

$$٨ = \dots$$

أعد العملية محققاً على الصفر . واستبدلاً $-(٨)$ بأي عدد صحيح سبب . ماذا تستنتج ؟

أعد لعملية مستبدلاً العدد صفر بأي عدد صحيح موجب ماذا تستنتج ؟

■ احسب :

$$-(٨) - (٩) = \dots$$

قارن العددين : $-(٨)$ و $-(٩)$. واملأ الفراغ فيما يلي :

$$-(٨) \dots -(٩)$$

أعد العملية مستبدلاً $-(٨)$ بالعدد (١٩) . و $-(٩)$ بالعدد (١٠٩) . واملأ الفراغ فيما يلي :

$$-(٩) \dots (١٠٩)$$

أعد العملية من جديد مختاراً أي عددين صحيحين سالبين . شرط أن تكون القيمة المطلقة للعدد المطروح أكبر من القيمة المطلقة للعدد المنطرح منه .

ماذا تستنتج ؟

لاحظت في النشاط الأول أن أي عدد صحيح سالب هو أصغر من الصفر . وهو أيضاً أصغر من أي عدد صحيح موجب .

ولاحظت في النشاط الثاني أنه بالنسبة لعددین صحیحین سالبین، العدد الأكبر هو صاحب القيمة المطلقة الصغرى.
نستنتج إذن :

كل عدد صحیح سالب هو أصغر من الصفر، وأصغر من أي عدد صحیح موجب. ونصغر الأعداد الصحيحة السالبة كلما كبرت قيمتها المطلقة.

و نرتب الأعداد الصحيحة السالبة على الشكل التالي :

$$0 < 1- < 2- < 3- < 4- < \dots$$

٤) ترتيب الأعداد الصحيحة وتمثيلها على خط الأعداد
من الفقرتين السابقتين نستنتج أن الأعداد الصحيحة مرتبة ترتيباً كلياً على الشكل التالي :

$$\dots < 4+ < 3+ < 2+ < 1+ < 0 < 1- < 2- < 3- < 4- < \dots$$

وكما مثلنا الأعداد الكليّة على نصف مستقيم، نمثل الأعداد الصحيحة على مستقيم، آخذين بعين الاعتبار الترتيب السابق :



أي عدد على يمين عدد آخر هو أكبر منه.

تمارين

(١) قرب عددين تاليين في كل مسألي

(أ) ٧ - و ١٥٠

(ب) ١٣٧٥ و ١٠٣٧٥

(ج) ٢١٥١٣ و ١٠٠٠٠

(د) صفر و ٣١٧

(هـ) صفر و ١١٥

(٣) اعداد في كل مم يلي تريد بوترية واحدة. جد مقدار تريد. وكمس أربعة اعداد تليها.

(أ) ٩ - ٥ - ١ -

(ب) ٧ - ١٠ - ١٣٠ - ...

(ج) ٢٠ - ١٥٠ - ١٠٠ -

(٤) في كل مم يلي تتاقص الأعداد التالية بوترية واحدة. حد مقدار التقص. وأكمل ستة اعداد تليها:

(أ) ١٠ - ١٥ - ٢٠ -

(ب) ٨ - ٥ - ٢ -

(ج) ٧ - ٣ - ١ -

(٢) رتب الأعداد في كل مم يلي:

(أ) ٧+ - ٥- - ٣+ - ٢- - ١٠ - ٩+ - ١ - ٧-

(ب) ٦- - ٢٠+ - ١٥- - ١ - ١٠ - ٨+ - ٣٠ -

(ج) ٧+ - ٩- - ٦- - ١٠ - ٣+ - ٤+ - ٣ - ١

الدرس الرابع : ضرب الأعداد الصحيحة وقسمتها

(١) الضرب

كما فعلنا بالنسبة لعملية الجمع في مجموعة الأعداد الصحيحة، سنعتبر أن عملية الضرب في \mathbb{Z} ، يقابلها عملية ضرب في \mathbb{Z} ، لها الخصائص نفسها، وتتوافق معها بالنسبة للأعداد الموجبة.

وسنعمد على ذلك للتعرف على حاصل ضرب عددين صحيحين. ■ لاحظ العمليات على الأعداد في العمود الأول، ثم تابع العمليات على القيم المطلقة في العمود الثاني.

برّر في كل مرة الخطوات، وأعد الكرة مختارًا أعدادًا أخرى.

ضرب عددين موجبين :

$$\begin{aligned} &= |6+1| \times |4+1| \\ &= 6 \times 4 \\ &= 24 \\ &|24+1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (6+) \times (4+) \\ &= 6 \cdot 4 \\ &= 24 \\ &24+ \end{aligned}$$

خصائص الضرب في \mathbb{Z} هي :

(١) خاصية الإبدال :

$$p \times b = b \times p$$

(٢) خاصية التجميع

$$(b \times c) \times p$$

$$= (b \times p) \times c$$

(٣) خاصية الواحد كعنصر محايد :

$$p = 1 \times p = p \times 1$$

(٤) خاصية توزيع الضرب بالنسبة للجمع :

$$(b + c) \times p$$

$$= b \times p + c \times p$$

$$(b + p) \times c = b \times c + p \times c$$

(٥) ضرب عددين موجبين في \mathbb{Z}

يتوافق مع ضربهما كعددين كليين.

حاصل ضرب عددين موجبين هو عدد موجب، قيمته المطلقة تساوي حاصل ضرب قيمتهما المطلقتين.

$$p < 0, b < 0$$

$$p \times b = (+) |p| \times |b| (+)$$

صرف عدد موجب عدد سالب

حاصل ضرب عدد موجب بعدد سالب هو عدد سالب .
قيمتة المطلقة تساوي حاصل ضرب قيمتيهما المطلقتين .

$$(\text{ } \times \text{ }) = \times$$

ضرب عددین سالبین :

$$\begin{array}{rcl}
 & & (V) \quad (Z) \\
 & & \vdots \\
 & & (YA^+) \quad (YA) + (V) \quad (Z) \\
 & & \vdots \\
 & & (YA) + [(V) \quad (Z)] + (V) \quad (Z) \\
 & & \vdots \\
 V \quad Z & & (YA^+) \quad [(V) \quad (V)] \quad (Z) \\
 & & \vdots \\
 V + Z & & (YA^+) + \cdot \quad (Z) \\
 & & \vdots \\
 YA & & (YA) \quad \cdot \\
 & & \vdots \\
 YA - & & YA
 \end{array}$$

حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب. قيمته المطلقة تساوي حاصل ضرب قيمتيهما المطلقتين.

$$(|u| \times |v|) = |u \times v|$$

مما سبق نستنتج قاعدتي الضرب الأساسيتين .

حاصل ضرب عددين صحيحين، هم الإشارة نفسها . هو عدد موجب .
حاصل ضرب عددين صحيحين، إشارة هما مختلفتان . هو عدد سالب .
وفي كلتا الحالتين، القيمة المطلقة لحاصل الضرب هي حاصل ضرب القيمتين المطلقتين للعددين .

٢) حاصل ضرب عدة أعداد صحيحة

■ لاحظ ما يلي .

$$(7+) \times (5+) = 35 +$$

$$(7-) \times (5-) = 35 +$$

ما هي العلاقة بين إشارة حاصل الضرب . وإشارة العدد ندي ضرباه

ـ (5+) ؟

■ لاحظ ما يلي .

$$(7+) \times (5-) = 35 -$$

$$(7-) \times (5+) = 35 -$$

ما هي العلاقة بين إشارة حاصل الضرب . وإشارة العدد ندي ضرباه

ـ (5-) ؟

* تحقق على امثلة من أن

$$- \times (-) = +$$

لاحظت في النشاط السابق أن الضرب بعدد موجب يحافظ على إشارة
 العدد المضروب فيه
 كما لاحظت أن الضرب بعدد سالب يغير إشارة العدد المضروب فيه.
 ولو ضربنا عدة أعداد وكانت إشارة الحاصل (+) إذا كان عدد العوامل
 السالبة زوجيًا، و (-) إذا كان عدد العوامل السالبة فرديًا.

■ تأكد مما سبق . بعد قيامك بالعمليات التالية :

أ) $\dots\dots\dots = (2+) \times (6+) \times (5+)$

ب) $\dots\dots\dots = (5+) \times (3+) \times (4-)$

ج) $\dots\dots\dots = (2+) \times (6-) \times (3-)$

د) $\dots\dots\dots = (2-) \times (3-) \times (4-)$

حاصل ضرب عدة أعداد صحيحة هو عدد سالب إذا كان عدد
 العوامل السالبة فرديًا، وهو عدد موجب إذا كان عدد العوامل
 السالبة زوجيًا.

٣) القسمة

تعرفنا على عملية القسمة في $١٢ \div ٤$ كعملية عكسية للضرب ، فالجمل التالية،
 مثلاً، هي جمل متكافئة :

$$١٢ = ٣ \times ٤ \quad ، \quad ١٢ \div ٤ = ٣ \quad ، \quad ٣ = ٤ \div ١٢$$

كذلك نعرف عملية القسمة في $١٢ \div ٣$ كعملية عكسية لعملية الضرب ،
 مثلاً :

$$30- = (5+) \times (6-)$$

سمي العدد (6-) حاصل قسمة (30-) على (5+) ونكتب :

$$6 = (30-) \div (5+)$$

نسمي هذه العملية قسمة ، والإشارة (÷) هي إشارة القسمة وتقرأ : «مقسم على» .

كذلك العدد (5+) ، هو حاصل قسمة (30-) على (6-) ، ونكتب :

$$5+ = (30-) \div (6-)$$

من قاعدتي ضرب عددين صحيحين، نستنتج قاعدتي قسمة عددين صحيحين كما يلي :

حاصل قسمة عددين صحيحين، لهما الإشارة نفسها ، هو عدد موجب .

حاصل قسمة عددين صحيحين، إشارتهما مختلفتان، هو عدد سالب .

وفي كلتا الحالتين، القيمة المطلقة لحاصل القسمة هي حاصل قسمة القيسيتين المطلقتين للعددين .

* احسب ما يلي :

$$..... = (7+) \div (14+)$$

$$= (2-) \div (12+)$$

$$= (8+) \div (24-)$$

$$= (9-) \div (36-)$$

تمارين

(١) أجر العمليات

$$\begin{aligned} & (٧) + (٨-) \\ & (٩) - (٢٢) \\ & (٣١٧) + (١٠٠) \end{aligned}$$

(٢) حسب ما يلي صيغتين وقرن لأحدهما

$$\begin{aligned} & [(٢-) + (٣)] \times (١٢-) \cdot [(٣) + (٦+)] \cdot (٥) \\ & [(٦+) + (٥)] \cdot [٠ + (٢)] \cdot (٦-) \\ & [(٢٠-) - (١٠+)] \times (١) \cdot [(٤) - (٨-)] \times (٧-) \end{aligned}$$

(٣) حول عملية الضرب إلى عملية جمع ثم ورن للضرب بالنسبة لتجمع وحس النتيجة

$$\begin{aligned} & [(٧) - (٦-)] \cdot (٥) \cdot [(٥-) - (٣-)] \cdot (٢) \\ & [(٧+) - (٦+)] \div (٤) \cdot [(٤) - (٣+)] \cdot (٣-) \end{aligned}$$

(٤) أثبت أن عملية الضرب تتوزع بالنسبة للطرح أي أن:
٢. (ب ج) ٢. ب ٢. ح مستعياً بتحويل الضرب إلى جمع

٥٥ احتصر الحمل التالية

$$\begin{aligned} & ٨ \text{ س } ٩ \text{ س } ٤ \text{ س } ٥ \text{ س } = \dots\dots\dots \\ & ٣ \text{ (س ص) } ٥ \text{ س } ٦ \text{ ص } = \dots\dots\dots \\ & ٢ \text{ ٢ } ٣ \text{ ٦ } ٥ \text{ ٦ } = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

(٦) إذا كان س ٢ ص ٣ ع ١٠ احسب كلاً مما يلي:

$$٢٠ - ٢٠ + (٢٠ + ٢٠) = ٤٠$$

$$\begin{aligned} & = ٢٠ - ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ \\ & = ٢٠ - ٢٠ + ٢٠ + ٢٠ \end{aligned}$$

(١) حسب ما يلي

$$\begin{aligned} & = (١٠) + (٢٥٠) + (٤) \\ & = (٤-) + (٥) + (٦) \\ & = (٤) + (٣) + (٢) \end{aligned}$$

(٨) أجر العمليات التالية

$$\begin{aligned} & (٤٢) + (٣-) \\ & (٩٢٨٠) : (٣٢) \\ & (٩٢٨٠) - (٢٩) \\ & (٧٤٨٨-) - (٣١٢٠) \\ & (٤) + (٤) - (٤) \end{aligned}$$

(٩) من المساواة (١٩٠) + (٢٤٠) = ٤٥٦ احس مباشرة

$$\begin{aligned} & (٤٥٦) - (٢٤٠) = \dots\dots\dots \\ & (٤٥٦) : (١٩) = \dots\dots\dots \\ & (٤٥٦) - (٢٤٠) = \dots\dots\dots \\ & (٤٥٦-) : (١٩-) = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

الدّرس الخامس : تبسيط التراكيب العددية

١) نظير حاصل جمع أعداد صحيحة

■ قارن العمليتين التاليتين :

أ - نظير حاصل جمع الأعداد $(٥+)$ ، $(٣-)$ ، $(٦+)$ هو : $٨ - = (٨+) - = (٦+) + (٣-) + (٥+) -$

ب - حاصل جمع نظائر الأعداد : $(٥+)$ ، $(٣-)$ ، $(٦+)$ هو : $٨ - = (٦-) + (٣+) + (٥-)$

■ لقد لاحظت في الدرس السابق أن :

$$١ - = ١ \times (١-)$$

أتبع الخطوات التالية ، وأعطي المبررات :

$$\begin{aligned} (٣ + ص + ع) \times (١-) &= (٣ - + ص - + ع -) \\ &= ٣ \times (١-) + ص \times (١-) + ع \times (١-) \\ &= (٣-) + (ص-) + (ع-) \end{aligned}$$

من النشاط السابق نستنتج :

$$\begin{aligned} &-(٣ + ص + ع) \\ &= (٣-) + (ص-) + (ع-) \end{aligned}$$

نظير حاصل جمع عدة أعداد صحيحة يساوي حاصل جمع نظائر هذه الأعداد الصحيحة.

■ عملية الطرح تتحوّل إلى عملية جمع (جمع نظير المطروح).
لحساب نظير حاصل طرح عددين . حوّل عملية الطرح الى عملية جمع.
وحسب نظير حاصل الجمع فيما يلي :

$$- (9-) - (7-) = ((9-) + (7+)) - - ((9-) - (7-)) -$$

$$(2+) -$$

$$- (8-) - (6+) = ((8-) + (6-)) - - ((8-) - (6+)) -$$

$$(2-) -$$

$$- (12-) - (8+) = ((12-) + (8-)) - - ((12-) - (8+)) -$$

$$(4-) -$$

$$- (س - ص) = - س + ص$$

٢) فكّ الأقواس

للقيام بعمليتين متتبعتين نستخدم الأقواس .
■ استخدم الأقواس لتعبّر عن العمليتين المتتابعتين التاليتين :
أ - اجمع العددين $(7+)$ و $(5-)$
ب اطرح النتيجة من $(3+)$

في النشاط السابق كتبت :

$$(3+) - ((5-) + (7+))$$

لتعبّر عن أنك طرحت من $(3+)$ حاصل جمع العددين : $(7+)$ و $(5-)$.

ولحساب نتيجة ذلك نتبع إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : نحسب أولاً نتيجة العملية الأولى :

$$(7+) + (5-) = 2+$$

ثم نحسب نتيجة العملية التالية :

$$(3+) - (2+) = 1+$$

الطريقة الثانية : نحول عملية الطرح إلى عملية جمع النظير، ونطبق القاعدة التي نقول : « إن نظير حاصل جمع عددين، هو حاصل جمع نظيري العددين »، فنحصل على :

$$\begin{aligned} & - (3+) - ((5-) + (7+)) \\ & = ((5+) + (7-)) + (3+) \\ & 1 + (5+) + (7-) + (3+) \end{aligned}$$

نستنتج من الطريقة الثانية ما يلي :

* احسب :

$$أ - (9+) - ((9+) + (5-))$$

$$ب - (5-) - ((3-) - (7-))$$

عد فلك قوسين مسبوقين بإشارة الطرح (-) نغير إشارات الأعداد الموجودة داخلها، وإذا كانا مسبوقين بإشارة (+) نبقى على إشارات الأعداد الموجودة داخلها.

٣ أنواع الأقواس

للقيام بعدة عمليات متتابعة نستخدم الأقواس، وهي على ثلاثة أنواع :

- ١) القوسان () ، وتستخدم عند القيام بعمليتين متابعتين.
- ٢) المعقفان [] وتستخدم عند القيام بثلاث عمليات متتابعة.
- ٣) الحاصرتان { } وتستخدم عند القيام بأربع عمليات متتابعة.

▲ مثال ١ :

(١) نطرح (٥-) من (٣+) : $(٣+) - (٥-)$

(٢) نضيف ٧+ إلى النتيجة : $(٣+) - (٥-) + (٧+)$

(٣) نطرح النتيجة من (٦+) :

$[(٣+) - (٥-) + (٧+)] - (٦+)$

(٤) نضيف (٨+) إلى النتيجة :

$\{ [(٣+) - (٥-) + (٧+)] - (٦+) \} + ٨+$

■ احسب النتيجة العددية لكل عملية من العمليات السابقة، وعلى التوالي. وأعط الجواب.

■ احسب النتيجة بفك الأقواس على التوالي : الأقواس ، العواقف ، الحواصر. ثم قارن النتيجة.

▲ مثال ٢ :

$$\begin{aligned} &= \{ [(١٣+) - (٧-)] - (٣-) \} + (٥-) - (٧+) \\ &= \{ [(١٣+) + (٧+) + (٣-)] + (٥-) \} - (٧+) \\ &= \{ (١٣+) + (٧+) + (٣-) + (٥-) \} - (٧+) \\ &= (١٣-) + (٧-) + (٣+) + (٥+) + (٧+) \\ &\quad . (٥-) \end{aligned}$$

▲ مثال ٣ :

$$\begin{aligned} &= ٤س - [٢س - (٥س - ٣ص) - ٣ص] \\ &= ٤س - [٢س - ٥س + ٣ص - ٣ص] \\ &= ٤س - [-٣س] \\ &= ٤س + ٣س \\ &\quad . ٧س \end{aligned}$$

تمارين

(١) جد نظير كل من العبارات التالية :

$$((٨-) + (٩+))$$

$$((٧-) + (٥-))$$

$$((٩+) + (٦-) + (٣+))$$

$$(س + ص - ع)$$

$$(س - ص - ع)$$

$$(-س - ص + ع)$$

(٢) احسب بفك الأقواس كلاً مما يلي :

$$((٤-) - ((٢-) - (٥+)) + ((٣+) + (٢-))$$

$$+ ((٦-) +$$

$$- ((٤-) + ((٢+) + (٥-)) - ((٧+) - (٦-))$$

$$- ((٦+) - ((٤+) - (٣-) - (٣+))$$

$$- ((٤٥+) + (٣٢-)) + ((١٩+) - (٢١+)) -$$

$$+ ((٤٢-))$$

(٣) احسب بفك الأقواس كلاً مما يلي :

$$- ((١٠+) - ((١٧-) - ((٤+) + (٥-) - (٦+))$$

$$+ ((١-) -$$

$$- ((١٢-) - ((٤-) - ((٨+) - (٤+) - (٥+))$$

$$+ ((١٤+) -$$

$$+ ((٤-) + ((٧+) - (٣+) + (١+)) -$$

$$+ ((٧+) -$$

$$- ((١٤+) - (١٧-) - ((١-) - (٢+))$$

$$+ ((٣-) - (٥+))$$

$$- ((١+) - ((٨-) - ((٩-) + (٧+))$$

$$+ ((٤+) - (٣-))$$

(٤) أكمل ما يلي :

$$((٤+) - (٥-) + س = ... - ...)$$

$$((٤+) - (٥-) + س = ... + ...)$$

(٥) بسّط العبارات التالية :

$$٢س + (٣س + ٤ص)$$

$$٢س - (٣س - ٤ص)$$

$$س - (٢ص + ٣ع) - (س - ٢ص - ٣ع)$$

$$٤ - [٢ - (٢ + ٣) + ٤]$$

$$٥ - [٢ + (٢ - ٣) - ٤]$$

(٦)

أ - ما هي الجملة التي إذا طرحنا منها : $٤ + ٢$

نحصل على $[(١-) - ٢]$ ؟

ب - ما هي الجملة التي إذا أضفنا إليها $٤ + (١-)$

نحصل على :

$$٢ - [(٦-) - ٢]$$

(٧) اطرح :

$$٤ - (١-) + ٣س - (٤+)$$

$$٤س + ٢ص - ٥س - ٤ص$$

$$٣س + ٢ص - ٣ع + ٢ص + ٣س$$

الفصل الثاني عشر :

الدائرة والدوران

- الدرس الأول : الدائرة وعناصرها
- الدرس الثاني : خصائص القطر في الدائرة
- الدرس الثالث : الدائرة والمستقيم
- الدرس الرابع : رسم الدائرة
- الدرس الخامس : الدورات

الدرس الأول : الدائرة وعناصرها

(١) الدائرة

■ عَيِّن نقطة على دفترك، وسمّها م.

حدّد نقطة P تبعد 2 سم عن م.

حدّد نقاطاً أخرى ب، ج، د، ... تبعد كلها 2 سم عن م.

هل تستطيع متابعة النشاط وتحدد جميع النقاط . واحدة بعد الأخرى.

والتي تبعد جميعها 2 سم عن م ؟



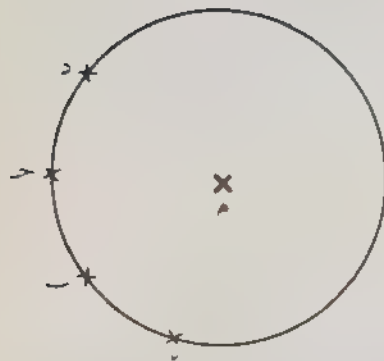
شكل (١)

في نشاطك السابق حدّدت في البداية بعض النقاط التي تبعد 2 سم عن النقطة م ، وحصلت على رسم كما في الشكل (١) ، ولاحظت أن متابعة النشاط ، وتعيين جميع النقاط التي تبعد 2 سم عن م ، نقطة بعد أخرى ، هي عملية غير ممكنة وهذا راجع إلى أن مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد 2 سم عن النقطة م هي مجموعة غير منتهية.

الشكل (٢) يمثّل جميع النقاط التي تبعد 2 سم عن النقطة م.

مجموعة النقاط التي تبعد 2 سم عن م تسمّى دائرة والنقطة م هي مركز

الدائرة.



شكل (٢)

كل قطعة تصل المركز بنقطة تنتمي إلى الدائرة تسمّى : نصف قطر الدائرة، أو شعاعاً.

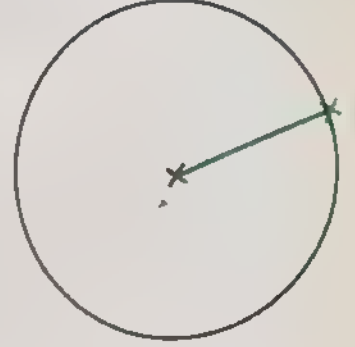
كل قطعة من القطع : $[M]$ ، $[MB]$ ، $[MC]$ ، $[MD]$ ؛ على الشكل (٢) ، هي نصف قطر .

المسافة التي حدّدت بُعد نقاط الدائرة عن المركز (2 سم في النشاط) تسمّى

طول نصف القطر .

نُحدّد الدائرة إذن بمعرفة مركزها، وطول نصف قطرها.

الدائرة هي مجموعة النقاط التي تبعد البعد نفسه عن نقطة معينة.
النقطة المعيّنة هي مركز الدائرة، وبعد نقاط الدائرة عن المركز هو طول نصف قطر الدائرة.



م هو مركز الدائرة.
[م] هو نصف قطر في الدائرة.
م | هو طول نصف قطر الدائرة.

نرمز إلى الدائرة التي مركزها م، وطول نصف قطرها ٢ سم بالرمز (م، ٢ سم).

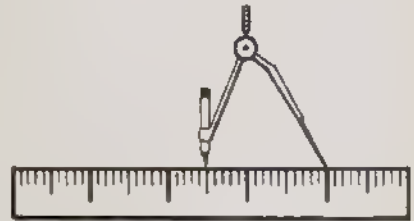
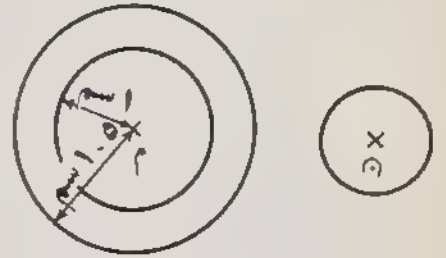
كذلك الرمز (ن، ٥، ٣ سم)، هو رمز الدائرة التي مركزها ن، وطول نصف قطرها ٥، ٣ سم.

واختصاراً، وإذا لم يكن هنالك التباس، نرمز إلى دائرة برمز مركزها بين قوسين؛ فنكتب (م)؛ أو (ن).

(٢) رسم دائرة

■ قم بنشاط مشابه للنشاط التالي لرسم دائرة مركزها م، طول نصف قطرها ١.٥ سم.

سمّ الدوائر التالية :



(٣) موقع نقطة بالنسبة لدائرة

■ على الشكل المجاور رسمنا الدائرة (م)، وعيّنا بعض النقاط من المستوى. $P \in (م)$. ما هو طول نصف قطر هذه الدائرة؟

قارن أطوال القطع، واملأ الفراغات فيما يلي بالرمز المناسب:

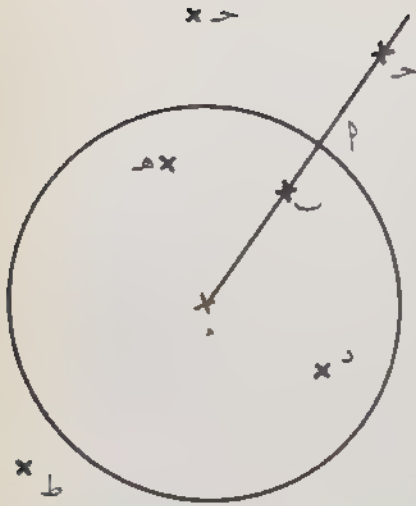
ا م ب | | ا م | | ا م ج ا

ا م د ا | | ا م | | ا م ج ا

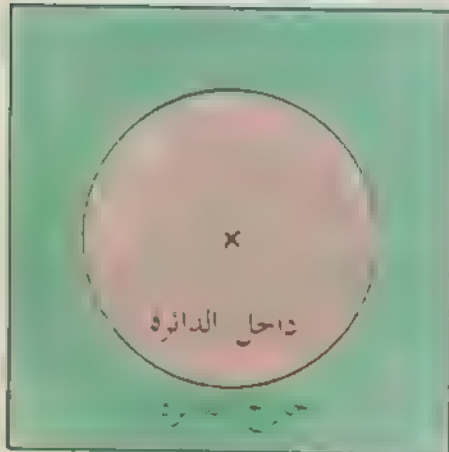
ا م ه ا | | ا م | | ا م ط ا

عيّن نقاطاً من المستوى، بحيث يكون بُعد كلٍ منها عن المركز أصغر من طول نصف القطر.

عيّن نقاطاً من المستوى، بحيث يكون بُعد كلٍ منها عن المركز أكبر من طول نصف القطر.



شكل (٣)



شكل (٤)

لاحظت في النشاط السابق أن الدائرة تجزئ المستوى إلى ثلاثة أجزاء:

أ - مجموعة النقاط التي بُعد كل منها عن مركز الدائرة يساوي طول نصف القطر ومجموعة هذه النقاط هي الدائرة.

ب - مجموعة النقاط التي بُعد كل منها عن مركز الدائرة أصغر من طول نصف القطر. ومجموعة هذه النقاط هي داخل الدائرة.

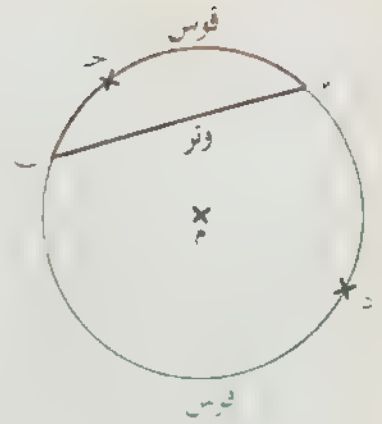
ج - مجموعة النقاط التي بُعد كل منها عن مركز الدائرة أكبر من طول نصف القطر ومجموعة هذه النقاط هي خارج الدائرة.

(٤) الوتر و القوس

■ ارسم دائرة (م) ثم عيّن نقطتين: A و B تنتميان إلى هذه الدائرة.

ارسم القطعة المستقيمة $[AB]$. أين تقع نقاط هذه القطعة بالنسبة إلى الدائرة؟

■ النقطتان : P و B تحدّان جزء ين من الدائرة . لَوْن أحدهما بالبني والآخر بالأخضر .



شكل (٥)

القطعة المستقيمة التي طرفاها نقطتان من دائرة تسمّى وترًا .
النقطتان : P و B من الدائرة (م) ، على الشكل (٥) ، تحدّان جزء ين من الدائرة . كل جزء يسمى قوسًا . P و B هما طرفا القوس .
لنرمز لقوس طرفاه : P و B ، نكتب : P و B ، واضعين بين الطرفين : P و B رمز نقطة تنتمي إلى القوس .

نرمز إلى القوس البني على الشكل (٥) بالرمز : P و B .
ونرمز إلى القوس الأخضر على الشكل (٥) بالرمز : P و B .

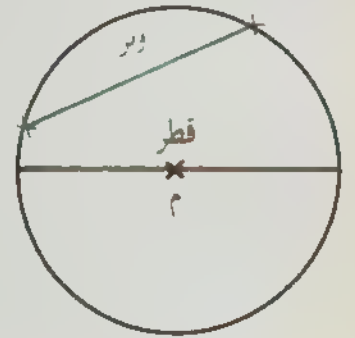
* على الشكل (٥) . سمّ كل قوس طرفاه : جود

٥) القطر

■ ارسم دائرة (م) ، وعيّن نقطة P تنتمي إلى (م) . ارسم عدة أوتار لها الطرف المشترك P .

ارسم الوتر الذي طرفه P ، ويمر في م . سمّ ب : طرفه الآخر . ما هي م بالنسبة للنقطتين P و B ؟ ما هو طول الوتر $[P, B]$ ؟

كل وتر يمرّ في المركز يسمى قطرًا . وطول القطر هو ضعفًا طول نصف القطر .



شكل (٦)

* ارسم أقطارًا أخرى للدائرة على الشكل (٦)

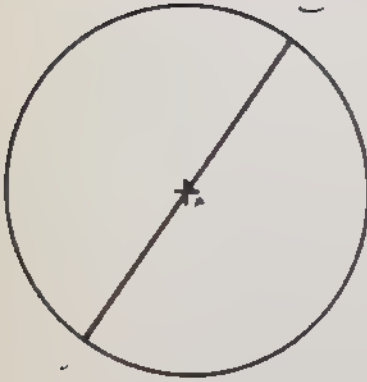
٦) مركز تناظر الدائرة

عنى الشكل (٧)، [أ ب] هو قطر في الدائرة (م).

■ أثبت أن أ و ب متناظران بالتناظر حول م.

عين نقطة جـ على الدائرة. عين نظيرها د بالتناظر حول م. أين تقع النقطة

د؟ ما هي القطعة [جـ د] بالنسبة للدائرة؟



شكل (٧)

لاحظت في الشاط السابق أن نظير كل نقطة من الدائرة (م) بالتناظر

حول المركز م هو نقطة من الدائرة.

ولاحظت أيضاً أن نقطتين من الدائرة متناظرتين حول المركز هما طرفا قطر

في الدائرة.

مركز دائرة هو مركز تناظر لها.

تمارين

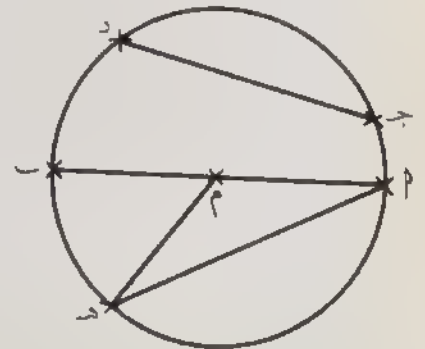
(١) عَيِّن نقطتين: P و B في المستوى.
أ - ما هو طول نصف قطر الدائرة التي مركزها P ،
وتمر في B

ب- ارسم هذه الدائرة وعَيِّن نقطة J عليها، ونقطة D
داخلها، ونقطة H خارجها. قارن $|AJ|$ ،
 $|AD|$ و $|AH|$ بطول القطعة $[AB]$.

(٢) دائرة مركزها M ، وطول نصف قطرها ٣ أمتار.
ب، ج، د ثلاث نقاط من المستوى، بحيث إن:
 $|AM| = ٢٩٥$ سم، $|BM| = ٣١٧$ سم،
 $|DM| = ٣٠٠$ سم.

أ - أين تقع النقاط: ب، ج، د بالنسبة للدائرة (م)؟
ب- لتكن: ب، ج، د نظائر النقاط: ب، ج، د
بالتناظر حول M . أين تقع النقاط ب، ج، د بالنسبة
للدائرة (م)؟

(٣) على الشكل التالي، سمِّ الأوتار، والأقطار، وأنصاف
الأقطار، وخمسة أقواس.



(٤) ارسم الدائرة (م، ٣ سم)، وعَيِّن نقطة P عليها.
ارسم وترًا طوله ٤ سم، وأحد طرفيه P .
كم وترًا تستطيع أن ترسم؟

(٥) P و B نقطتان، بحيث إن: $|AB| = ٢$ سم.
أ - ارسم الدائرة (م، ٣ سم).
ب- ارسم الدائرة (ب، ٣ سم).
ج - ليكن $\{J, D\} = (P) \cap (B)$.

كيف هو المستقيم AB بالنسبة للقطعة $[JD]$ ؟
كيف هو المستقيم JD بالنسبة للقطعة $[AB]$ ؟

(٦) ارسم الدائرة (م، ٥ سم)، وارسم فيها الأوتار:
 $[AB]$ ، $[BJ]$ ، $[JD]$ ، بحيث يكون:
 $|AB| = |BJ| = |JD| = ٥$ سم.
تحقق من أن: $M \in [AD]$. ما هو $[AD]$ بالنسبة للدائرة؟

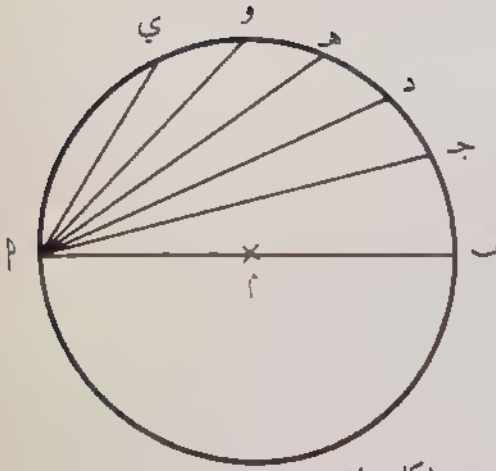
(٧) P و B نقطتان، بحيث إن: $|AB| = ٥$ سم.
ارسم الدائرتين: (م، ٢ سم) و (ب، ٣ سم).
كم نقطة مشتركة للدائرتين؟ وأين تقع؟

(٨) $[AB]$ و $[JD]$ قطران في الدائرة (م).
أثبت أن: $|AJ| = |AD|$.

الدرس الثاني : خصائص القطر في الدائرة

(١) القطر والأوتار

على الشكل (١) رسمنا القطر [أب] ، وعدة أوتار في الدائرة (م).
■ قس طول كل من القطر والأوتار ، واملأ الجدول التالي :



شكل (١)

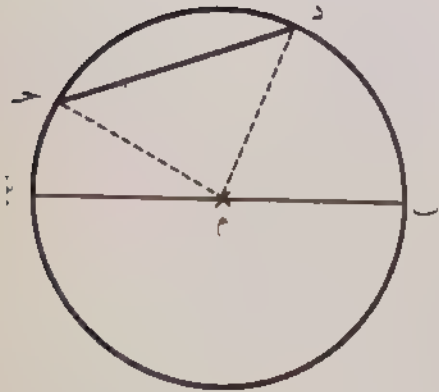
أب	أب	أب	أب	أب	أب	أب
----	----	----	----	----	----	----

٥٠ ملم

قارن النتائج واذكر ما تلاحظه بالنسبة لطول وتر ، ولطول قطر في الدائرة.

على الشكل (٢) ، [أب] قطر و [جد] وتر في الدائرة (م).

■ تتبع الخطوات التالية ، وأعط المبررات لكي تثبت أن :
 $|أب| > |جد|$



شكل (٢)

$$١- |أب| > |أج| + |أد|$$

$$٢- |أب| = |أج| + |أد|$$

$$٣- |أب| > |جد|$$

لاحظت وأثبت ما يلي :

القطر في دائرة هو أطول وتر فيها.

٢) القطر العمود على وتر

على الشكل (٣)، [جدد] هو قطر في الدائرة (م)، وَ جدد عمودي على الوتر $[أب]$ ، وَ $\{أ\} = [أب] \cap [جدد]$.

■ قارن بواسطة المسطرة، أو الفرجار، أطوال القطعتين: $[أأ']$ وَ $[أ'ب]$. ما هو المستقيم جدد بالنسبة للقطعة $[أب]$ ؟

تتبع الخطوات التالية، وأعط المبررات لكي تثبت ملاحظتك السابقة:

$$-١ \quad |أأ'| = |أ'ب|$$

$$-٢ \quad |أأ'| = |أ'ب|$$

$$-٣ \quad \text{جدد هو العمود المنصف للقطعة } [أب].$$

لاحظت وأثبتت في نشاطك السابق ما يلي:

المستقيم المار في مركز دائرة، والعمودي على وتر فيها هو العمود المنصف لهذا الوتر.

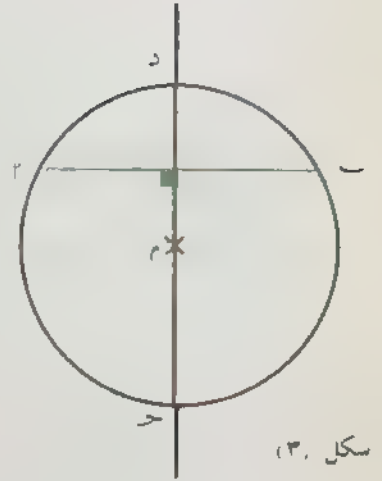
■ على الشكل (٤)، المستقيم س س ص هو العمود المنصف للوتر $[أب]$ في الدائرة (م).

تحقق من ذلك. ومدّ المستقيم س س ص، وتحقق من أن: $م \in س س ص$. تتبع الخطوات التالية، وأعط المبررات لكي تثبت ملاحظتك السابقة:

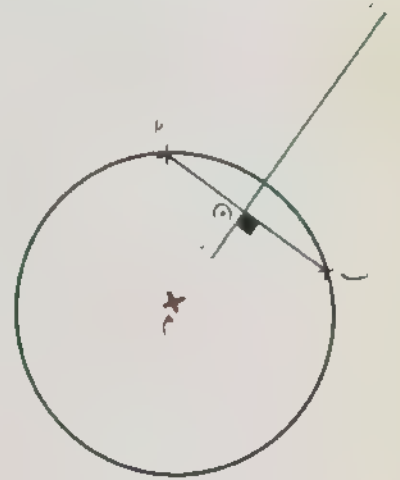
$$-١ \quad |أأ'| = |أ'ب|$$

$$-٢ \quad م تنتمي الى العمود المنصف للقطعة [أب]$$

$$-٣ \quad م \in س س ص.$$



شكل (٣)



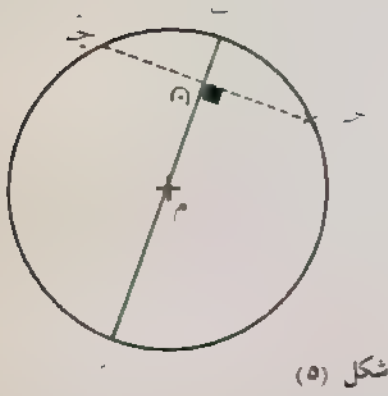
شكل (٤)

لاحظت وأثبتت في نشاطك السابق ما يلي :

العمود المنصف لوتر دائرة يمرّ في مركز الدائرة.

٣ محاور تناظر الدائرة

■ ارسم دائرة على ورقة شفافة، وارسم مستقيماً يمر في مركزها. أطو الورقة حول المستقيم الذي رسمت. ماذا تلاحظ بالنسبة للدائرة؟ ما هو هذا المستقيم بالنسبة للدائرة؟



شكل (٥)

على الشكل (٥)، [أب] قطر في الدائرة (م)، وجـ \exists (م). أنزلنا من جـ العمود على أ ب، فقطعه في د، وقطع الدائرة في النقطة جـ.

■ ما هو أ ب بالنسبة لـ [جـ د]؟

كيف هما النقطتان: جـ و جـ بالنسبة للمستقيم أ ب؟
ما هي استنتاجاتك؟

أثبتت في النشاط السابق أن نظير النقطة جـ من الدائرة (م) بالتناظر حول المستقيم أ ب، هو نقطة من الدائرة. وهذا صحيح بالنسبة لكل نقطة من الدائرة.

وبالتالي، فإن كل قطر في الدائرة هو محور تناظر لها، وهذا ما لاحظته في

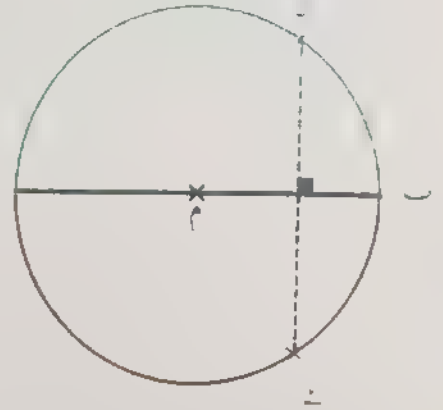
النشاط الأول بواسطة الطي .

ستنتج :

القطر في دائرة هو محور تناظر لها .

(٤) نصف دائرة

على الشكل (٦) ، [أب] هو قطر في الدائرة (م) .
 أب هو محور تناظر في الدائرة . وبالطي حول أب يتطابق الجزء الملون
 بالأخضر من الدائرة مع الجزء الملون بالبنّي .
 لذلك نسمي كل جزء من هذين الجزءين نصف دائرة :

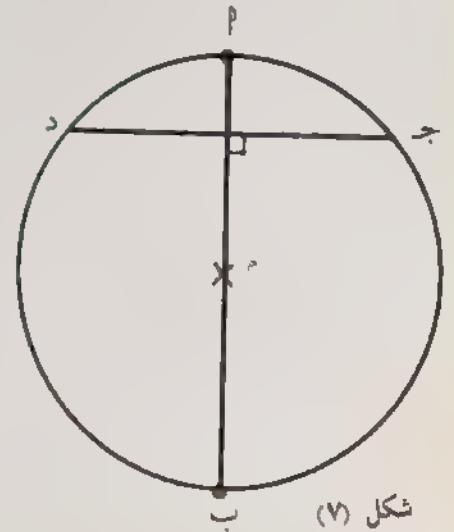


شكل (٦)

القطر في دائرة يَحْزِي الدائرة إلى قوسين متطابقين ، كل قوس
 منهما يسمّى نصف دائرة .

(٥) منتصف قوس في دائرة

- ارسم دائرة على ورقة شفافة .
- ارسم وترًا [جد] في الدائرة ، ولَوْنِ بلونين مختلفين القوسين المحدّدين به .
- ارسم القطر [أب] العمودي على الوتر [جد] .
- اطوِ الورقة حول أب واذكر ما تلاحظه بالنسبة للأقواس .

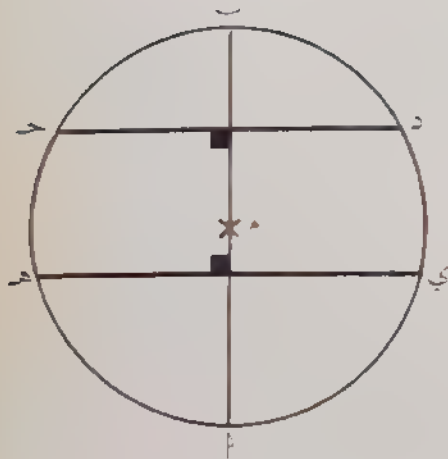


شكل (٧)

التناظر حول P يبين لنا أن لقصر $[AB]$ يحوئ كلاً من القوسين :
 \widehat{AD} و \widehat{DB} إلى جزءين متطابقين. حيث إن نظير \widehat{AD} هو \widehat{DB} ونظير
 \widehat{DB} هو \widehat{AD} .

لذلك نسمي النقطة P منتصف القوس \widehat{AD} . ونسمي النقطة B
 منتصف القوس \widehat{DB} .

القطر العمودي على وتر في دائرة يمر في منتصف القوس
 الذي طرفاه طرفا الوتر.



شكل (٨)

٦) الأقواس المحددة بين أوتار متوازية
 على الشكل (٨) جد و هـ متوازيان. $[AB]$ قطر في الدائرة عمودي
 على جد و هـ.

■ ما هو نظير القوس \widehat{AD} بالتناظر حول P ؟
 لو قمنا بعملية الطي حول P فاذا يحصل للقوسين : \widehat{AD} و \widehat{DB} ؟
 ارسم شكلاً مشابهاً للشكل (٨) ، وتحقق مما سبق.

كل وترين متوازيين يحددان قوسين متطابقين.

تمارين

(٤)

- أ - ارسم الدائرتين (م، ٣سم) و (م، ٥سم).
- ب - عَيِّن وتَرَّا [أب] في الدائرة الأولى.
- ج - عَيِّن النقطتين ج و د نقطتي تقاطع الدائرة (م، ٥سم) مع المستقيم أ ب.
- د - ارسم العمود على أ ب، والمار في م، وسمِّه.
- هـ - سمِّ جميع القطع المستقيمة على أ ب، والتي لها الطول نفسه.

(١) ارسم دائرة (م)، وعَيِّن فيها وتَرَّا [أب].
 ارسم القطر [هـي]، بحيث يكون هـي عمودياً على أ ب.
 أثبت أن: $ا هـ ١٢ = ا هـ ب ١ = ا هـ ب ١$ و $ا ي ١٢ = ا ي ب ١$.

(٢) أ و ب نقطتان من المستوى.
 ارسم عدة دوائر، بحيث يكون [أب] وتراً في كلٍ منها.

(٣)

أ - عَيِّن في دائرة (م) وترين: [أب] و [جد]،
 بحيث يكون أ ب و ج د متوازيين.
 ب - لتكن هـ منتصف [أب]. ارسم العمود على
 أ ب، والمار في هـ، وسمِّه س ص.
 أثبت أن س ص يمر في النقطة م.
 ج - لتكن { هـ } = س ص ∩ ج د.
 أثبت أن ا هـ ج ا = ا هـ د ا.

(٥) أ و ب نقطتان على دائرة (م).
 قسِّم القوس أ ب إلى قوسين متطابقين.

(٦) أ، ب، ج ثلاث نقاط على دائرة (م).
 حدِّد القوس أ هـ، بحيث يكون القوسان أ هـ و ب ج متطابقين.

الدَّرْسُ الثَّالِثُ: الدَّائِرَةُ وَالْمُسْتَقِيمُ

(١) وضع دائرة ومستقيم

ارسم مستقيماً $س ص$. وعَيِّن نقطة $م$ تبعد ٣ سم عن $س ص$.
ارسم المستقيم العمودي على $س ص$. والمارَّ في $م$. وَسمَّ عَ مسقطه على $س ص$.

■ ارسم لدوائر : (١ سم . ٢ سم) . (٢ سم . ٢٥ ملم) . (٢٨ ملم) .

كيف هو تقاطع كلٍّ من هذه الدوائر مع المستقيم $س ص$ ؟
ارسم أية دائرة طول نصف قطرها أصغر من ٣ سم .

كيف هو تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم $س ص$ ؟
■ ارسم الدوائر : (٥ سم . ٤ سم) . (٣٥ ملم) . (٣٢ ملم) .

كيف هو تقاطع كلٍّ من هذه الدوائر مع المستقيم $س ص$ ؟
ارسم أية دائرة طول نصف قطرها أكبر من ٣ سم .

كيف هو تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم $س ص$ ؟
■ ارسم الدائرة (٣ سم) .

هل النقطة $ع \in (٣$ سم) ؟ لماذا ؟

خذ أية نقطة $ب \in س ص$. $ب \neq ع$.

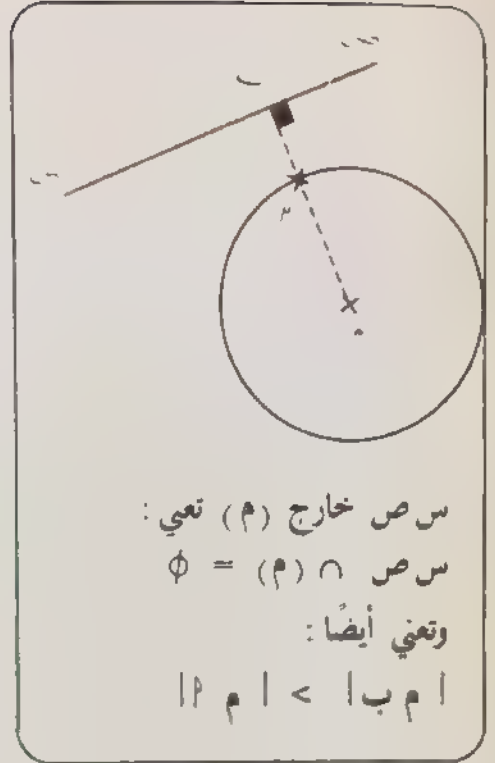
قارن $[ع]$ و $[ب]$. هل $ب \in (٣$ سم) ؟ لماذا ؟

$م$ هي المجموعة (٣ سم) $\cap س ص$ ؟

كيف هو المستقيم $س ص$ بالنسبة لنصف القطر $[ع]$ ؟

٢) مستقيم خارج دائرة

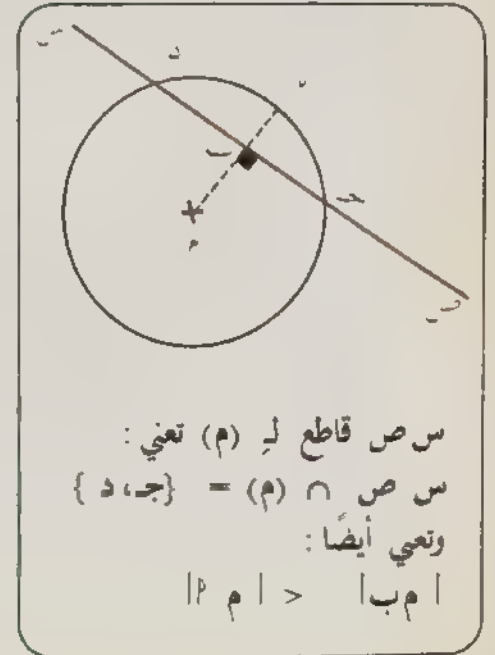
لاحظت في النشاط الأول أنه بالنسبة لدائرة (م) ومستقيم س ص، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة م والمستقيم س ص أكبر من طول نصف قطر الدائرة فإن تقاطع (م) مع س ص هو المجموعة الخالية. نقول في هذه الحال: إن المستقيم س ص هو خارج الدائرة.



نقول عن مستقيم إنه خارج دائرة، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم أكبر من طول نصف القطر. وعندئذ جميع نقاط المستقيم هي خارج الدائرة.

٣) مستقيم قاطع لدائرة

لاحظت في النشاط الثاني أنه بالنسبة لدائرة (م) ومستقيم س ص، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة م والمستقيم س ص أصغر من طول نصف قطر الدائرة، فإن (م) و س ص يتقاطعان في نقطتين. نقول في هذه الحال: إن المستقيم س ص هو قاطع للدائرة.

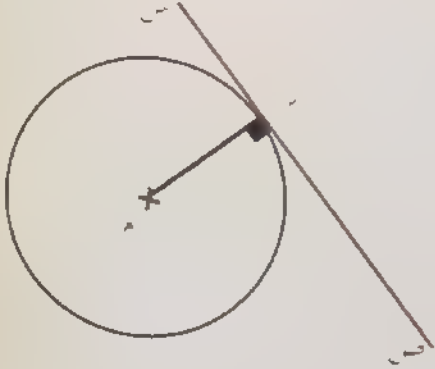


نقول عن مستقيم إنه قاطع لدائرة، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم أصغر من طول نصف القطر. وعندئذ يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين فقط.

٤) مستقيم مماس لدائرة

لاحظت في النشاط الثالث أنه بالنسبة لدائرة (م) ومستقيم س ص ، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة م والمستقيم تساوي طول نصف قطر الدائرة ، فإن (م) و س ص يتقاطعان في نقطة واحدة .

نقول في هذه الحال : إن المستقيم س ص هو مماس للدائرة ، ونسمي نقطة التقاطع نقطة التماس .

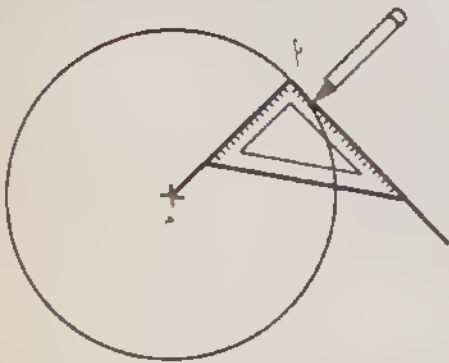


س ص مماس لـ (م) تعني :
 $\{P\} = (م) \cap س ص$
 وتعني أيضًا :
 المسافة بين م و س ص تساوي طول نصف القطر .

نقول عن مستقيم إنه مماس لدائرة . إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم تساوي طول نصف القطر . وعندئذ يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس .

ولاحظت أيضًا في النشاط نفسه الخاصية التالية للمماس :

لمماس لدائرة هو عمودي على نصف القطر المار في نقطة التماس .



شكل (١)

٥) رسم مماس لدائرة

١ هي نقطة تنتمي إلى الدائرة (م) . لرسم المماس للدائرة (م) . والمماس في م . نرسم المستقيم العمودي على م م في النقطة P ، كما هو مبين على الشكل (١) .

تمارين

(١) دائرة مركزها (م) و طول قطرها ٦ م. س ص،
كل، هي ثلاثة مستقيمت من المستوى، بحيث إن المسافة
بين النقطة م وكل من هذه المستقيمت هي على التوالي:
٢٩٥ سم. ٣٢٥ سم. ٣٠٠ سم.

ما هو وضع كل من هذه المستقيمت بالنسبة للدائرة؟

(٢) [ب] هو قطر في الدائرة (م).

أ - ارسم المماس للدائرة، والمار في ب، وسمه س ص.
ارسم المماس للدائرة، والمار في ب، وسمه كل.
ب- أثبت أن س ص و كل متوازيان.

(٣) ارسم مماسين متوازيين لدائرة معينة.

(٤) ارسم دائرة (م)، ومستقيمت س ص في المستوى،
بحيث تكون المسافة بين م و س ص مختلفة عن طول نصف
قطر الدائرة.

أ - ارسم المماسات على الدائرة الموازية لـ س ص. ما هو
عددها؟

ب- ارسم المماسات على الدائرة، والعمودية على س ص.
ما هو عددها؟

(٥) (م) دائرة و [ب] وتر فيها و س ص هو العمود على
ب، والمار في م.

أ - ارسم المماس للدائرة المار في النقطة ب، وسمه ج،
نقطة تقاطعه مع س ص.

ب- ارسم نظير الشكل الحاصل بالتناظر حول س ص
ج- أثبت أن ج ب هو مماس للدائرة، وأن:
ا ج ب = ا ج ب ا.

(٦) س ص مستقيم، و ب س ص.
ارسم عدة دوائر تمر في ب، وبحيث يكون س ص مماساً لها.

(٧) [ب] قطاع زاوي.
ارسم عدة دوائر، بحيث يكون ضلعا القطاع مماسين لها.

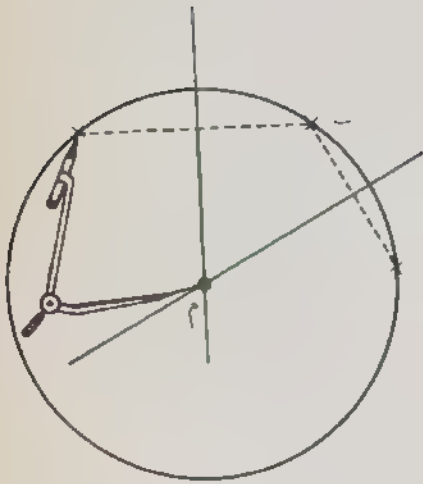
(٨) ب ج مثلث. ارسم دائرة، بحيث تكون أضلاع
المثلث مماسات لها.

الدرس الرابع : رسم الدائرة

(١) رسم دائرة بمعرفة ثلاث نقاط فيها

- على الشكل (١) ثلاث نقاط P ، B ، J ليست على استقامة واحدة.
- أين تقع النقاط التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين : P و B ؟
- أين تقع النقاط التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين : B و J ؟
- كيف تحدّد النقطة التي تبعد البعد نفسه عن النقاط الثلاث : P ، B ، J ؟

شكل (١)



شكل (٢)

لرسم دائرة تمر في النقاط : P ، B و J علينا تحديد مركز الدائرة، وطول نصف قطرها.

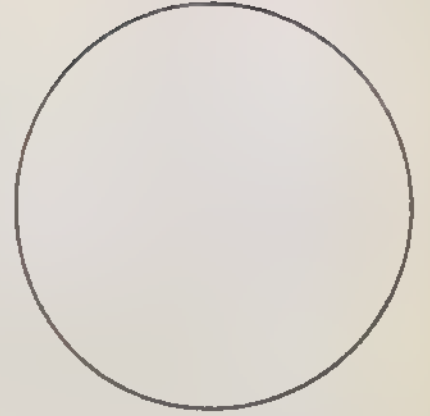
مركز الدائرة هو نقطة تبعد البعد نفسه عن P ، B ، J وهي، كما لاحظت في النشاط السابق، نقطة تقاطع العمود المنصف للقطعة $[AB]$ ، والعمود المنصف للقطعة $[BJ]$. أما طول نصف قطر الدائرة فهو المسافة بين هذا المركز وإحدى النقاط : P ، B ، J .

لرسم الدائرة التي تمر في النقاط : P ، B ، J نقوم إذن بالخطوات التالية (شكل ٢) :

- أولاً : نرسم العمود المنصف للقطعة $[AB]$.
- ثانياً : نرسم العمود المنصف للقطعة $[BJ]$.
- ثالثاً : نحدّد النقطة M ، نقطة تقاطع العمودين السابقين.
- رابعاً : نفتح الفرجار، ونثبت إبرته في M ، ونضع رأس قلمه على إحدى النقاط : P ، B أو J ونرسم الدائرة.

٢) تعيين مركز دائرة مرسومة

■ على شكل (٣) دائرة مركزها غير معلوم.
 حل: نأخذ نقطتين A و B على الدائرة.
 نرسم العمود المصنف لـ $[AB]$ ونعمود المصنف لـ $[BA]$ ، ونحدد
 نقطة تقاطعهم M .



شكل (٣)

لقد حددت في النشاط السابق النقطة M : مركز الدائرة المعطاة.

٣) رسم دائرة بمعرفة قوس منها

■ على شكل (٤) قوس دائرة \widehat{AB}
 حل: نقطة C تنتمي إلى القوس. نختار A و B $\neq C$
 نرسم الدائرة التي تمر في A و B . حل: M و N هما
 مديرتا



شكل (٤)

لقد رسمت في النشاط السابق الدائرة التي \widehat{AB} هو قوس منها

تمارين

١) ارسم دائرة تمر في رؤوس المثلث ABC .

٢) ABC مستقيم. M و N نقطتان. نبحث إن:

٢ ABC و M و N \neq ABC .

ارسم الدائرة التي تمر في M و N . حيث يكون ABC مماساً
 لها.

الدَّرْسُ الْخَامِسُ: الدَّوَرَاتُ

(١) ماهية الدوران

■ ثَبَّتْ إبرة الفرجار في م على الشكل (١)، وضع رأس القلم على P . ما هو عدد الاتجاهات التي يمكن أن تتبعها لرسم قوس دائرة انطلاقاً من وضعك هذا؟

ارسم قوساً في الاتجاه الأول، وقوساً آخر في الاتجاه الثاني، وسمِّ \vec{A} و $\vec{A'}$ الطرف الآخر لكل قوس.

شكل (١)



شكل (٢)

في نشاطك السابق حصلت على شكل يشبه الشكل (٢)، وقت في كل مرة بعملية تسمى دوراناً.

\vec{A} هي صورة P بالدوران الأول.

$\vec{A'}$ هي صورة P بالدوران الثاني.

الاتجاه الذي اتبعناه للوصول إلى \vec{A} هو الاتجاه المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة، ويسمى الاتجاه الموجب.

الاتجاه الذي اتبعناه للوصول إلى $\vec{A'}$ هو اتجاه دوران عقارب الساعة، ويسمى الاتجاه السالب.

الزاوية \widehat{PMA} تحدّد مقدار الدوران الأول، وهي تساوي على الرسم 70° .

نقول في هذه الحال: إن زاوية الدوران الذي قُدم به للوصول إلى \vec{A} هي:

$+70^\circ$. للتأكيد على أن الدوران حصل في الاتجاه الموجب.

الزاوية $\widehat{PMA'}$ تحدّد مقدار الدوران الثاني، وهي تساوي على الرسم 40° .

في أي اتجاه تدور حول الكعبة؟

* أي اتجاه دوران تتبع لفتح حنفية؟

أي اتجاه دوران تتبع لفتح اسطوانة غاز؟

نقول في هذه الحال : إن زاوية الدوران الذي قننا به للوصول الى \hat{A} هي -40° . للتأكيد على أن الدوران حصل في الإتجاه السالب.

■ على الشكل (٢). \hat{A} هي صورة P بالدوران الذي مركزه M . وزاويته $+70^\circ$.

ما هي صورة P بالدوران الذي مركزه M ، وزاويته -70° ؟

لاحظت في النشاط السابق أنه اذا كانت \hat{A} صورة P بالدوران الذي مركزه M . وزاويته $+70^\circ$ ؛ فإن الدوران الذي مركزه M ، وزاويته -70° ، يعيد \hat{A} إلى وضعها الأول، أي إلى P . لذلك نقول : إن الدوران الذي زاويته -70° ، هو الدوران المعاكس للدوران الذي زاويته $+70^\circ$.

كذلك فإن الدوران الذي مركزه M ، وزاويته $+40^\circ$ ، هو الدوران المعاكس للدوران -40° ، والذي مركزه النقطة M نفسها (شكل ٢).

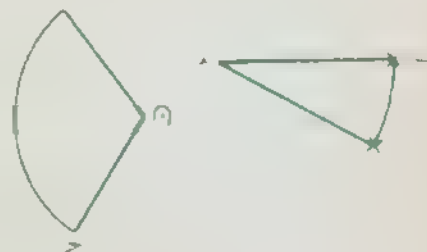
(٢) تعيين صورة نقطة بدوران معطى

على الشكل (٣)، عيّنا النقطة M ، والنقطة P .

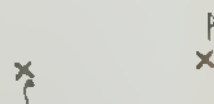
■ ارسم. مستعملاً المسطرة والمنقلة، نصف المستقيم $[M, S]$ ، بحيث إن $\widehat{MP, S} = 40^\circ$ ، وبحيث يكون الانتقال من $[M, P]$ إلى $[M, S]$ بالإتجاه الموجب.

ارسم قوساً مركزه M ، وطول نصف قطره $|M, P|$.
حدّد النقطة \hat{P} نقطة تقاطع القوس ونصف المستقيم $[M, S]$.

لقد عيّنت النقطة \hat{P} ؛ صورة النقطة P بالدوران الذي مركزه M ، وزاويته $+40^\circ$.



* على الرسم أعلاه B هي صورة P بدوران مركزه M ود هي صورة B بدوران مركزه M .
ما هو اتجاه كل من الدورانين ؟
استعمل المنقلة لتحديد زاوية كل من الدورانين.



شكل (٣)

* M وَ B نقطتان.

عيّن صورة B بالدوران الذي مركزه M وزاويته -20° .

٣) صورة شكل بدوران

■ على الشكل (٤) مثلثان : $\triangle PAB$ و $\triangle HPT$ ، و نقطة م .
تحقق من أن النقاط : هـ ، ط و ي هي صور النقاط : P ، ب و ج
بالدوران الذي مركزه م ، وزاويته 60° .

خذ نقطة س على أحد أضلاع المثلث $\triangle PAB$.

عين صورة س بالدوران الذي مركزه م وزاويته 60° . ماذا تلاحظ ؟
خذ نقطة ص داخل المثلث $\triangle PAB$. عين صورة ص بالدوران نفسه .
ماذا تلاحظ ؟

خذ نقطة ع خارج المثلث $\triangle PAB$. عين صورة ع بالدوران نفسه . ماذا
تلاحظ ؟

نقول أن المثلث هـ ط ي هو صورة المثلث $\triangle PAB$ بالدوران الذي مركزه
م وزاويته 60° .

نقول عن شكل صـ إنه صورة الشكل سـ بدوران، إذا
كانت نقاط صـ هي صور نقاط سـ بهذا الدوران .

٤) صورة قطعة مستقيم

■ $[PAB]$ قطعة مستقيم . م نقطة من المستوى ، والنقاط جـ ، دـ ، ... هي
متتالية إلى $[PAB]$.

ارسم صور النقاط : P ، ب ، جـ ، دـ ، بالدوران الذي مركزه

شكل (٥)



م

در این بخش به بررسی ویژگی‌های هندسی
شکل‌ها و اندازه‌گیری آن‌ها می‌پردازیم.
در ادامه به بررسی انواع مختلف مثلثات و
چگونگی استفاده از آن‌ها در هندسه خواهیم پرداخت.

در این بخش به بررسی ویژگی‌های هندسی
شکل‌ها و اندازه‌گیری آن‌ها می‌پردازیم.
در ادامه به بررسی انواع مختلف مثلثات و
چگونگی استفاده از آن‌ها در هندسه خواهیم پرداخت.

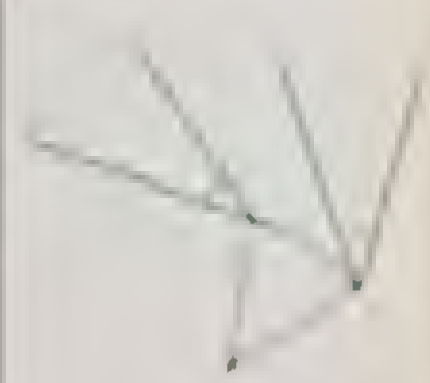


این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین است.
مرکز آن نقطه تقاطع سه میانه است.
این نقطه مرکز ثقل مثلث است.

در این بخش به بررسی ویژگی‌های هندسی
شکل‌ها و اندازه‌گیری آن‌ها می‌پردازیم.
در ادامه به بررسی انواع مختلف مثلثات و
چگونگی استفاده از آن‌ها در هندسه خواهیم پرداخت.

در این بخش به بررسی ویژگی‌های هندسی
شکل‌ها و اندازه‌گیری آن‌ها می‌پردازیم.
در ادامه به بررسی انواع مختلف مثلثات و
چگونگی استفاده از آن‌ها در هندسه خواهیم پرداخت.

در این بخش به بررسی ویژگی‌های هندسی
شکل‌ها و اندازه‌گیری آن‌ها می‌پردازیم.
در ادامه به بررسی انواع مختلف مثلثات و
چگونگی استفاده از آن‌ها در هندسه خواهیم پرداخت.



این شکل یک دایره است.
مرکز آن نقطه تقاطع دو شعاع است.
این نقطه مرکز دایره است.

وذلك لأن صورة نقطة على خط التماس هي نقطة على خط التماس
 أي أن صورة نقطة على خط التماس هي نقطة على خط التماس
 أي أن صورة نقطة على خط التماس هي نقطة على خط التماس
 أي أن صورة نقطة على خط التماس هي نقطة على خط التماس

٩. التماس حول نقطة والدوران

■ في الشكل ٩.١

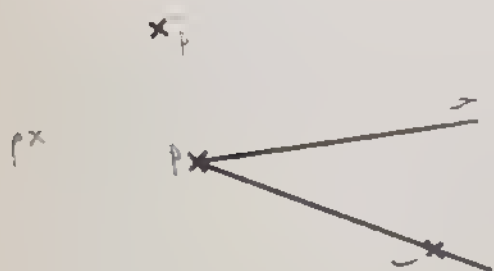
نرى أن خط التماس في نقطة التماس هو خط التماس
 أي أن صورة نقطة على خط التماس هي نقطة على خط التماس



الدوران تحفظ على التماس في نقطة التماس

تمارين

(٣) على الشكل أدناه \hat{P} و \hat{B} هما صورتنا P و B بدوران مركزه M .



استعمل المنقلة والمسطرة فقط لإكمال رسم صورة الشكل بهذا الدوران.

(٤) على الشكل أدناه ، \hat{P} هي صورة P بدوران مركزه M . S هي صورة S بالدوران نفسه.



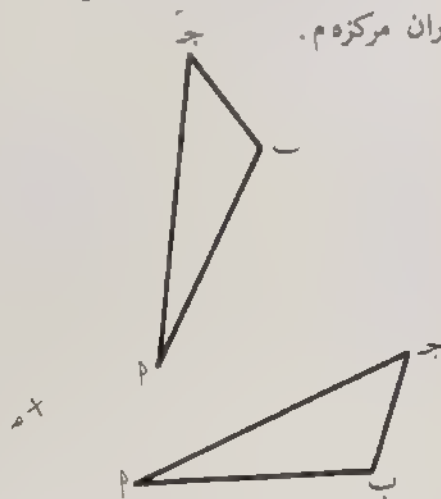
استعمل مثلث الرسم فقط لإكمال صورة الشكل بهذا الدوران.

(١) أ - ارسم صورة الشكل التالي بدوران مركزه M ، وزاويته 30° .



ب - ارسم صورة الشكل نفسه بدوران مركزه M ، وزاويته 50° .

(٢) على الشكل أدناه : \hat{P} ، \hat{B} ، \hat{J} هي صور P ، B ، J بدوران مركزه M .



أ - حدد زاوية هذا الدوران.

ب - عيّن على الرسم القطع المستقيمة التي لها الضوئ نفسه ، والزوايا المتساوية واذكر السبب.

- ٥) م و P نقطتان من المستوى .
- أ - ارسم صورة P بالدوران الذي مركزه م ، وزاويته $+70^\circ$ ، وسمّها P' .
- ب - ارسم صورة P' بالدوران الذي مركزه م ، وزاويته $+110^\circ$ ، وسمّها P'' .
- ج - ما هو الدوران الذي ينقلنا من P إلى P'' ؟
- د - كيف هما النقطتان P و P' بالنسبة للنقطة م ؟

الفصل الثالث عشر :

العلاقات

الذير الأول : العلاقات
الذير الثاني : تمثيل العلاقات

درس الأول : العلاقات

(١) ماهية العلاقة

سـ = {الرياض ، لندن ، دمشق ، بيروت ، واشنطن }
صـ = {إنجلترا ، لبنان ، المملكة العربية السعودية ، تركيا } هما مجموعتان .

كلمة «عاصمة» تربط بعض عناصر المجموعة سـ ببعض عناصر المجموعة صـ .

■ اكتب الجمل من نوع :

..... هي عاصمة

بحيث تكون الكلمة الأولى عنصراً في سـ ، والثانية عنصراً في صـ .
اكتب بجدولة العناصر المجموعة الجزئية من صـ التي كل عنصر منها له عاصمة في سـ .

في النشاط السابق حدّدنا مجموعتين سـ و صـ ، ورابطاً بين بعض عناصر المجموعة الأولى ببعض عناصر المجموعة الثانية .

نقول إننا حدّدنا علاقة من سـ نحو صـ .

المجموعة الأولى سـ تسمى مجال العلاقة .

المجموعة الثانية صـ تسمى المجال المقابل للعلاقة .

المجموعة الجزئية من المجموعة الثانية التي ترتبط عناصرها بعناصر المجموعة الأولى تسمى : مدى العلاقة .

ووجدت في النشاط ان مدى العلاقة هو :

{إنجلترا ، لبنان ، المملكة العربية السعودية } .

حمية . هي عصية . سبي قاعدة العلاقة . وهي التي تحدد ترتيب
بين عددين محدد . ويحدد سبي
بمعرفة هي صورة لعدد - علاقة . كانت المسكة العربية السعودية هي
صورة الرياض - علاقة

(٢) العلاقة والأزواج المرتبة

س = { ١١ . ٥ . ٣ . ٢ }

ص = { ٢٥٠ . ٩٦ . ٣٥ . ١٧ . ٦ }

حدد العلاقة من س = ص هو ص التي قاعدتها هو قسمة - .

■ ما هو محدد العلاقة ؟

ما هو محدد العلاقة ؟

ما هو ملئ العلاقة ؟

كتب جميع الأزواج المرتبة (٢ ، ٣) ، حيث يكون $a \in S$.

ب = ص و ا هو قسمة ب

■ س = { ٢٥ . ١٥ . ٧ . ٦ . ٤ }

ص = { ١١ . ٥ . ٣ . ٢ }

الأزواج المرتبة : (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ١٥) ، (٤ ، ٣) .

(٥ ، ١٥) . (٥ ، ٢٥) .

حدد الأول في س . وحدد الثاني في ص

ما هي قاعدة علاقة من س = ص هو ص . هي تربط حدد لأول من

كل زوج مرتب بحدد ثاني منه ؟

لاحظت في النشاط الأول أن علاقة من S نحو V محدّدة بقاعدة
مكتّك من تحديد أزواج مرتبة حدّها الأول في S ، وحدّها الثاني في
 V . وهي :

$(2, 6)$ ، $(2, 96)$ ، $(2, 250)$ ، $(3, 6)$ ، $(3, 96)$ ،
 $(5, 250)$ ، $(5, 35)$.

ولاحظت في النشاط الثاني أن أزواجاً مرتبة : حدّها الأول في S ،
وحدّها الثاني في V ، تحدّد علاقة من S نحو V ، قاعدتها هي :

« هو مضاعف » .

نستنتج إذن :

نحدّد علاقة ما من مجموعة S نحو المجموعة V
بتحديد مجالها S ، ومجالها المقابل V ، ومجموعة
أزواج مرتبة : حدّها الأول في S ، وحدّها الثاني في
 V .

تمارين

(١)

س = {احمد، سامي، بشار، بلال، فادي}

ص = {إيران، باكستان، تركيا، سيلان}

حدّدنا العلاقة من س نحو ص بالقاعدة:

«يبدأ بالحرف نفسه».

أ- حدّد صور كل من: أحمد، سامي، بشار، بلال، فادي، بهذه العلاقة.

ب- ما هو مجال العلاقة؟ ما هو مجالها المقابل؟ ما هو مداها؟

ج- اكتب الأزواج المرتبة التي تحدّد هذه العلاقة.

(٢)

س = {ب. ج. س. ل. ي}

ص = {خالد، سيف، شمس، باب، عمر}

عرّفنا العلاقة من س نحو ص التي قاعدتها «حرف من كلمة».

أ- ما هو مجال هذه العلاقة؟ ما هو مجالها المقابل؟ ما هو مداها؟

ب- اكتب الأزواج المرتبة التي تحددها.

(٣)

س = {٢، ٤، ٦، ٨}

ص = { $p \geq 10$: $k > 50$ }

عرّفنا العلاقة من س نحو ص بالأزواج المرتبة:

{(٢، ١٠)، (٤، ٢٠)، (٦، ٣٠)، (٨، ٤٠)}.

١٣٦

(٤)

س = {٣، ٩، ٢٣، ٤٥}

ص = {٢، ٧، ١٥، ٢٩}

أ- اكتب الأزواج المرتبة التي تحدّد العلاقة من س نحو ص، والتي قاعدتها: «أكبر من».

ب- الأزواج المرتبة: (٣، ٧)، (٣، ١٥).

(٣، ٢٩)، (٩، ١٥)، (٩، ٢٩)، (٢٣، ٢٩)

تحدّد علاقة من س نحو ص.

اكتب قاعدة لهذه العلاقة.

٥) عرّفنا العلاقة من مجموعة الأعداد الكلية لـ نحو لـ

بالأزواج المرتبة: (لـ، ب)، حيث: ب = ٢ · لـ.

أ- ما هي هذه الأزواج المرتبة؟

ب- اكتب قاعدة تحدّد هذه العلاقة.

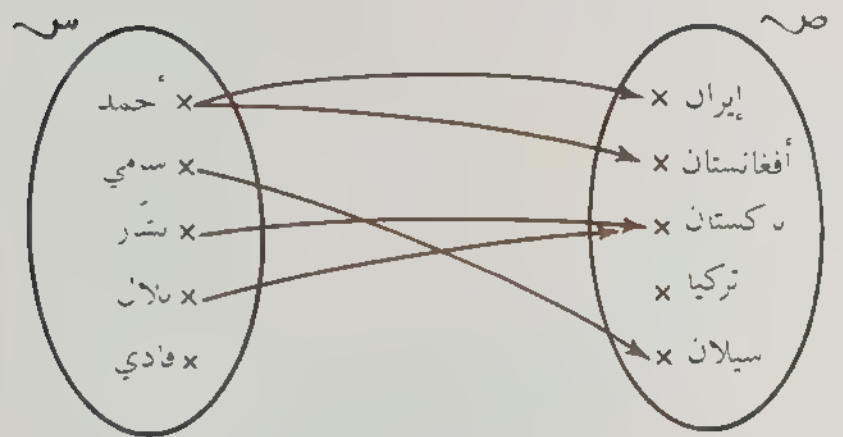
ج- ما هو مدى هذه العلاقة؟

الدّرس الثّاني : تمثيل العلاقات

١) تمثيل العلاقات

\sim = {أحمد، سامي، بشّار، بلال، فادي}
 \simeq = {إيران، أفغانستان، باكستان، تركيا، سيلان}
 حدّدنا العلاقة من \sim نحو \simeq بالأزواج المرتبة:
 (أحمد، إيران) ؛ (أحمد، أفغانستان) ؛ (سامي، سيلان) ؛ (بشّار، باكستان) ؛ (بلال، باكستان) ؛ والتي قاعدتها : «يبدأ بالحرف نفسه» .
 نمثّل هذه العلاقة بإحدى الطرق التالية :

التمثيل بواسطة الرسم السهمي : تنطلق الأسهم من عناصر المجال متجهة نحو عناصر المجال المقابل .



ينطلق السهم من تمثيل الحدّ لأول لزوج مرتب ، لينتهي عند تمثيل الحدّ الثاني حد الزوج مرتب

التمثيل بواسطة جدول سهم في أعلى على اليمين يبين الانطلاق من نحو المجال المقابل

سبار	تركيب	باكستان	أفغانستان	إيران	
			X	X	أحمد
X					سامي
		X			شمار
		X			ملال
					فادي

التمثيل بواسطة شبكة تربيع : السهم في الأسفل على اليسار يبين الانطلاق من المجال نحو المجال المقابل.

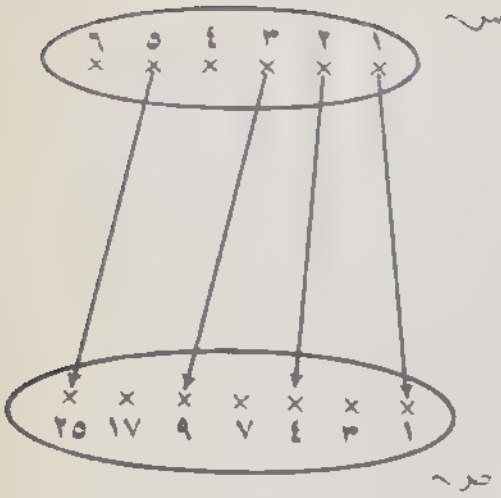
سبار	تركيب	باكستان	أفغانستان	إيران	
					أحمد
					سامي
					شمار
					ملال
					فادي

٢) تفسير العلاقات

- على الشكل (١) مثلنا بواسطة الرسم السهمي علاقة ما هو مجال هذه العلاقة؟
ما هو المجال المقابل لهذه العلاقة؟
ما هو مدى هذه العلاقة؟
عين قاعدة تحدد هذه العلاقة.

- على الشكل (٢) مثلنا بواسطة جدول علاقة ما هو مجال هذه العلاقة؟
ما هو المجال المقابل لهذه العلاقة؟
ما هو مدى هذه العلاقة؟
عين قاعدة تحدد هذه العلاقة.

- على الشكل (٣) مثلنا بواسطة شبكة تربيع علاقة. أجب عن الأسئلة نفسها التي وردت في النشاطين السابقين.

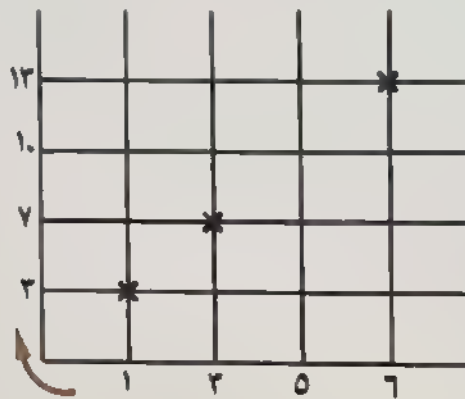


شكل (١)

١٢	٩	٦	٣	
			X	١
		X		٢
	X			٣
X				٤

شكل (٢)

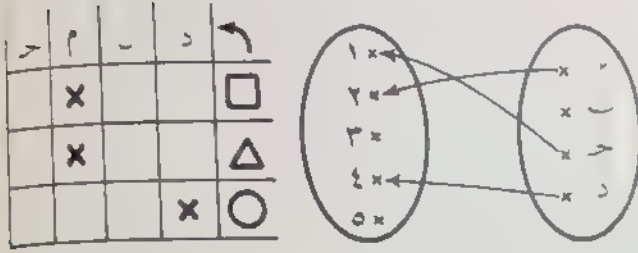
في كل مرة من المرات السابقة فسرت علاقة انطلاقاً من تمثيلها.



شكل (٣)

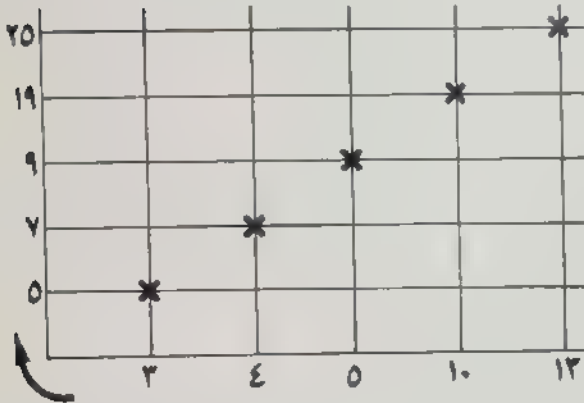
تمارين

٤. منب علاقة على كل شكل من الشكلين التاليين:



حدد في كل مرة المجال والمجال المقابل والمدى. وفسر العلاقة د. أمكن.

٥. على الشكل التالي مثلنا علاقة:



(١)

س = {محمد، أسامة، صقر، زهير}

عمر محمد ١١ سنة، عمر أسامة ١٢ سنة. يزيد عمر صقر على عمر محمد سنتين. وولد زهير في العام نفسه الذي ولد به أسامة.

أ - أكتب مجموعة الأعمار ص.

ب - مثل بالطرق الثلاث العلاقة من س نحو ص.

(٢)

س = {٨، ١٠، ١٢، ١٥، ٢٠}

ص = {٤، ٥، ٦، ٧}

عرفنا العلاقة من س نحو ص، والتي قاعدتها «ضعفا».

مثل هذه العلاقة بالطرق الثلاث.

(٣)

ع = {٠ < ١ < ٢ < ٣ < ٤}

ج = {٥ < ٦ < ٧ < ٨ < ٩}

عرفنا العلاقة من ع نحو ج بالأزواج المرتبة (ب، أ)، حيث: ب = ٢ - ٣.

أ - مثل هذه العلاقة بواسطة الرسم السهمي.

ب - مثل هذه العلاقة بواسطة جدول.

- أ - حدّد مجال العلاقة. ومحدد المقابل. ومداها.
- ب- املأ الجدول التالي حيث ص هي صورة س
بالعلاقة. وفسّر هذه العلاقة.

س	٣			
ص	٥			

الفصل الرابع عشر :

المحور والمحتوى الطيكا رتي ص × ص

الدرس الأول : المحور

الدرس الثاني : تمثيل الأزواج المرتبة في المستوى

الدرس الثالث : تمثيل العلاقات العددية

الدرس الخامس : تمثيل التراكيب العددية

الدّرس الأول : المحوّر

(١) ماهية المحور

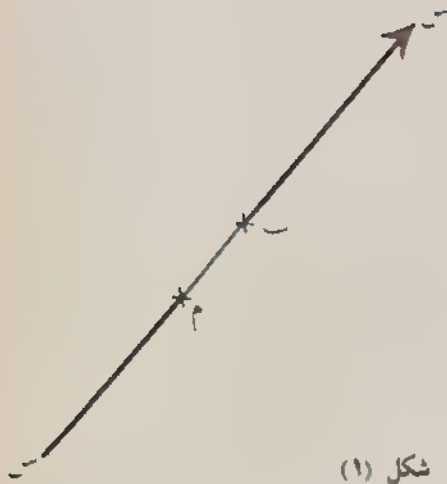
سّ س مستقيم، و م نقطة عليه (شكل ١).

على سّ س اتجاهان : من م نحو سّ و من م نحو سّ.

عندما نختار واحداً من الاتجاهين، نضع على المستقيم سّ س سهمًا يدل على الاتجاه المختار، ونسمي هذا الاتجاه : الاتجاه الموجب. أما الاتجاه الآخر، فيسمى عندئذ : الاتجاه السالب.

لقياس الطول على هذا المستقيم نعيّن وحدة للطول ؛ فعلى الشكل (١) مثلاً، وحدة الطول هي : طول [م ب].

نقول عندئذ : إن سّ س هو محور، والنقطة م تسمى أصل المحور.



شكل (١)

المحور هو مستقيم حدّدت عليه ثلاثة عناصر :
(١) المنحى : وهو واحد من اتجاهي المستقيم، ويسمى الاتجاه الموجب.

(٢) نقطة : تسمى الأصل.

(٣) وحدة للطول.



شكل (٢)

في كثير من الأحيان نعيّن وحدة الطول كمقياس لمتجه محدد على المحور. منحاه منحى المحور.

فعلى المحور سّ س مثلاً (شكل ٢)، الوحدة ممثلة بمقياس المتجه م ج.

في هذه الحال نسمي المتجه $\overleftarrow{م ج}$: المتجه الواحدي ، ونرمز له بحرف واحد مثلاً $\overleftarrow{و}$: $\overleftarrow{م ج} = \overleftarrow{و}$.

متجه $\overleftarrow{و}$ حدي هو متجه على محور $\overleftarrow{و}$ مسحي محور. ومقياسه وحدة الطول.

(٢) المحور . وتمثيل الأعداد الصحيحة



شكل (٣)

على الشكل (٣) $\overleftarrow{س س}$ هو محور أصله $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{و}$ هو المتجه الواحدي عليه. قسمنا نصف المستقيم $\overleftarrow{م س}$ إلى قطع متطابقة ، طول الوحدة منها هو طول الوحدة على المحور ؛ فحصلنا على النقاط : $\overleftarrow{ا}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ج}$ ، $\overleftarrow{د}$ ، $\overleftarrow{هـ}$ ، ... وقسمنا بالطريقة نفسها نصف المستقيم $\overleftarrow{م س}$. وحصلنا على النقاط : $\overleftarrow{ط}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{ل}$ ، ...
مقابل النقاط كتبنا الأعداد الصحيحة ، كما هو مبين على الشكل أعلاه.
لقد مثلنا الأعداد الصحيحة على المحور $\overleftarrow{س س}$.

* مثل الأعداد الصحيحة على محور ، طول الوحدة عليه ١٥ ملم.

(٣) إحداثي نقطة على المحور

على الشكل (٣) كل نقطة يقابلها عدد صحيح . نسمي هذا العدد الصحيح إحداثي هذه النقطة.

وهكذا فإن إحداثي النقطة جـ هو $+3$ ، ونكتب: جـ $(+3)$ ، كذلك
إحداثي النقطة ي هو -2 ، ونكتب: ي (-2) ، أما بالنسبة للأصل م
فنكتب: م (0) .

٤) القياس الجبري لمتجه



شكل (٤)

على الشكل (٤): مثلنا المحور سـس، والمتجهين $\overrightarrow{أب}$ ، و $\overrightarrow{جـد}$.
■ ما هو مقياس المتجه $\overrightarrow{أب}$ بالنسبة لوحدة الطول على محور؟
ما هو منحى المتجه بالنسبة لمنحى المحور؟
أجب عن الأسئلة نفسها بالنسبة للمتجه $\overrightarrow{جـد}$.

* النقاط: (أ، ب، جـ، د)
هي النقاط المعينة على المحور في
الشكل (٤).

* املأ الفراغات فيما يلي:

$$\overrightarrow{مأ} = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{جـم} = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{جـب} = \dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{بـد} = \dots\dots\dots$$

* عيّن على الشكل نفسه متجهاً
قياسه الجبري $(+10)$ ، ومتجهاً آخر
قياسه الجبري (-8) .

لاحظت أن مقياس المتجه $\overrightarrow{أب}$ هو (2) ، وأن اتجاهه موجب. كما
لاحظت أن مقياس المتجه $\overrightarrow{جـد}$ هو (3) ، وأن اتجاهه سالب.
نقول: إن القياس الجبري للمتجه $\overrightarrow{أب}$ هو $(+2)$ ، ونرمز له بالرمز:
 $\overrightarrow{أب}$ ، ونكتب:

$$\overrightarrow{أب} = +2$$

كما نقول: إن القياس الجبري للمتجه $\overrightarrow{جـد}$ هو (-3) ، ونرمز له بالرمز:
 $\overrightarrow{جـد}$ ، ونكتب:

$$\overrightarrow{جـد} = -3$$

(٥) القياس الحبري وإحدى نقطه



۵۰۰

من نعمته و شرفه و درودش بر من و بر شما و بر همه
مؤمنان و بر همه مسلمانی که در این عالمند

۱۔ جہاں جہان کی ہر شے

لاحظت في النشاط السابق أن إحداثي النقطة P يدوي \bar{m} . وكذلك النسبة للنقاط الأخرى.

إحداثي نقطة P على محور أصله o هو القيس الجبري للمتجه \overrightarrow{op} . ورمزه x_P .

* عن محور أصه م. حددنا
المقاط ^١ (٧+) . - (٢-)
ح- (٩-)

املا الصراعات وما يلي

1987

$$= \overline{mb}$$

= 4 -

(٦) حساب القياس الجبري لمتجه على محور



شکل (۶)

■ على محور في شكل ٦. حدد نقطتي ب. ج. د.

املاً الفراغات فيما يلي ، وقارن الأجوبة في كل مرة :

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \dots\dots\dots ; \overline{MB} - \overline{MB} = \overline{P} - \overline{P} = \dots\dots\dots \\ \overline{AJ} &= \dots\dots\dots ; \overline{MJ} - \overline{MJ} = \overline{P} - \overline{P} = \dots\dots\dots \\ \overline{BJ} &= \dots\dots\dots ; \overline{MJ} - \overline{MB} = \overline{P} - \overline{P} = \dots\dots\dots \\ \overline{DB} &= \dots\dots\dots ; \overline{MB} - \overline{MB} = \overline{P} - \overline{P} = \dots\dots\dots \\ \overline{BP} &= \dots\dots\dots ; \overline{P} - \overline{P} = \overline{P} - \overline{P} = \dots\dots\dots \\ \overline{DJ} &= \dots\dots\dots ; \overline{MJ} - \overline{MB} = \overline{P} - \overline{P} = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

لاحظت في النشاط ما يلي :

$$\overline{BP} - \overline{MB} = \overline{P}$$

أيًا كان وضع متجه على محور أصله م ، فإن القياس الجبري لهذا المتجه ، هو حاصل طرح إحداثي أصل المتجه من إحداثي طرفه .

(٧) حساب طول قطعة مستقيم على محور

طول قطعة مستقيم $[BP]$ ، هي مقياس المتجه \overrightarrow{BP} .

ومقياس المتجه \overrightarrow{BP} هو القيمة المطلقة لقياسه الجبري ، وبالتالي فإن :

$$|BP| = |\overline{BP} - \overline{MB}|$$

(١) على محور حيث طول الوحدة هو سنتيمتر. ضع نقاط
تساوية معروفة بإحداثياتها:
٥ (٨) . ب (٤-) . ج (١٠) . د (٥) . هـ (١٠)

(٢) على محور أصله هـ. حدد: النقاط

٥ (٢٠) . ب (٥-) . ج (٢-) . د (٦)

أحسب: هـ. أ. ب. ج. د. هـ.
ج. د. م. د. د. م.

ب- احسب: أ. ب. ج. د. هـ.

(٣) ضع على محور أصله هـ النقاط: (أ. ب. ج. د).
بحيث يكون:

هـ. أ. ب. ج. د. هـ. = ٥. ٢. ١. ٤. ٥ = ٥

أحسب: م. د. هـ. ج. م.

ب- جد مقاييس المتجهات: م. د. هـ. ج. م.

(٤) ب. ب. د. ثلاث نقاط على محور أصله هـ. محور
إحداثيات هذه النقاط: م. أ. ب. ج. هـ. هي
حداثة صور هذه النقاط بالسحب له لإنه محور
سحب. ومقياسه ٣ م هي صورة هـ. هـ. (سحب)

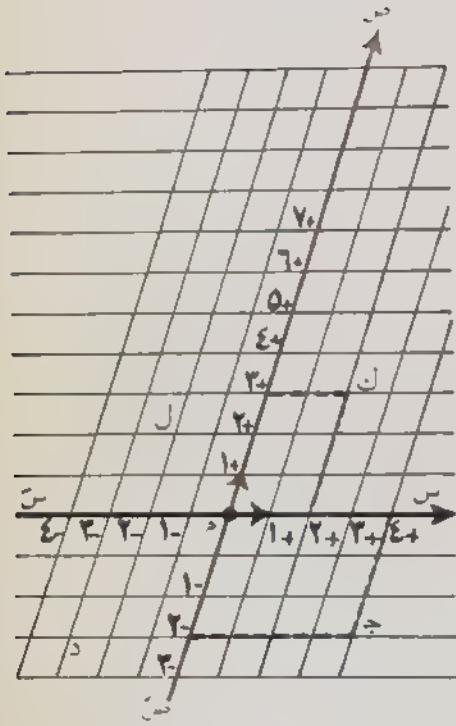
(٥) ٥ (٥٠) . ب (٥-) . ج (٣) ثلاث نقاط على محور
أصله هـ.

٥ نقطة على محور. بحيث: م. أ. ب. ج. د. هـ.

أحسب الوحدة ذاتها على محور. وحدد النقطة ٥ كـ
م هي إحداثيات النقاط: أ. ب. ج. د. هـ. على محور
حديد.

الدرس الثاني : تمثيل الأزواج المرتبة في المستوى

(١) محاور شبكة تربيع



شكل (١)

* حدد على الشكل (١) الإحداثي السيني - والإحداثي الصادي لكل من النقاط : ل ، ج ، د ، م .

الشكل (١) هو شبكة تربيع ، مِيزنا عليه المحور سَـسَـ ، وأصله مَـ ، والمحور صَـصَـ ، وأصله أيضًا مَـ .

المستقيمت الموازية للمستقيم صَـصَـ تقسم المستقيم سَـسَـ إلى قطع متتالية ومتطابقة . ونقاط تقاطع هذه المستقيمت مع سَـسَـ هي تمثيل لمجموعة الأعداد الصحيحة .

كذلك نقاط تقاطع صَـصَـ مع المستقيمت الموازية لـ سَـسَـ ، هي تمثيل لآخر لمجموعة الأعداد الصحيحة .

كل نقطة من عقد شبكة التربيع هي نقطة تقاطع مستقيمين موازيين لـ صَـصَـ و سَـسَـ .

النقطة كَـ مثلاً ، هي نقطة تقاطع مستقيمين :

الأول مواز لـ صَـصَـ ، ويتقاطع مع سَـسَـ في النقطة الممثلة للعدد $2+$ ، فنقول : إن $(2+)$ هو الإحداثي السيني للنقطة كَـ .

الثاني مواز لـ سَـسَـ ، ويتقاطع مع صَـصَـ في النقطة الممثلة للعدد $3+$ ، فنقول : إن $(3+)$ هو الإحداثي الصادي للنقطة كَـ . المحور سَـسَـ يسمى محور الإحداثيات السينية ، والمحور صَـصَـ يسمى محور الإحداثيات الصادية .

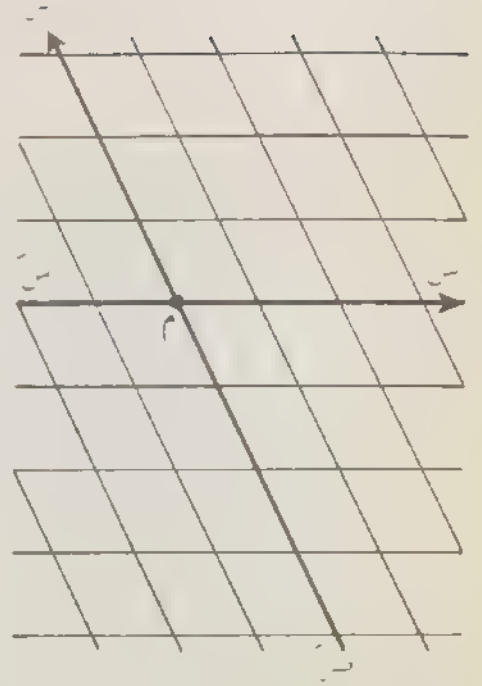
٢) تمثيل الأزواج المرتبة

■ على شبكة التريبع (شكل ٢)، عَيِّن النقاط التالية، حيث حدّدنا إحداثيها السيني وإحداثيها الصادي :

أ (الإحداثي السيني : $1+$ ؛ الإحداثي الصادي : $2+$)

ب (الإحداثي السيني : صفر ؛ الإحداثي الصادي : $3-$)

حتى لا نكرّر في كل مرة ذكر الإحداثي السيني والإحداثي الصادي، نكتب باختصار : أ ($1+$ ، $2+$) و ب (0 ، $3-$).
ونقول : إن أ هي تمثيل للزوج المرتب ($1+$ ، $2+$). وكذلك ب، هي تمثيل للزوج المرتب (0 ، $3-$).



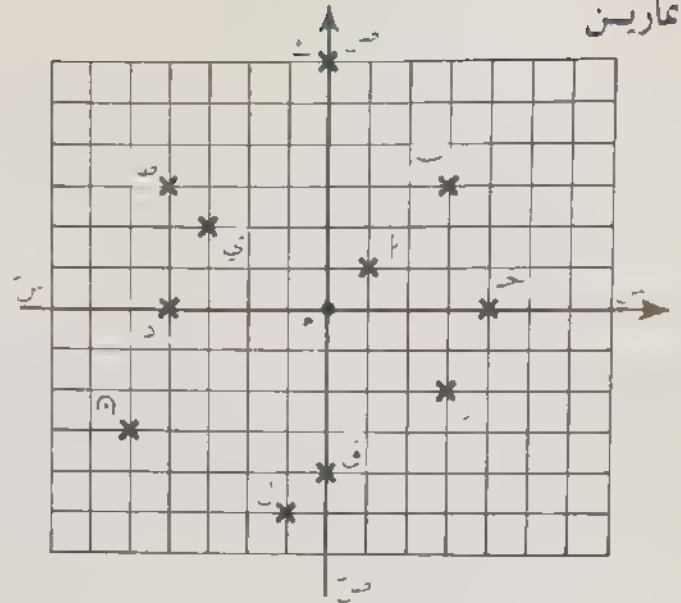
شكل (٢)

لكي نمثّل زوجاً مرتباً من الأعداد الصحيحة على شبكة تريبع حدّدت محاورها السينية والصادية، نعيّن النقطة من المستوى حيث الحدّ الأول هو الإحداثي السيني، والحدّ الثاني هو الإحداثي الصادي.

٣) المستوى الديكارتي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

مجموعة النقاط على شبكة التريبع التي تمثّل جميع الأزواج المرتبة ($أ$ ، $ب$)، حيث : أ $\in \mathbb{R}$ ، و ب $\in \mathbb{R}$ ؛ تسمّى : المستوى الديكارتي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

تمارين



١) حدّد على شبكة التريبع أعلاه إحداثيات النقاط : ب، ج، د، ط، ي، ك، ل، م، ن، ق، ر.

٢) ارسم شبكة تريبع، وحدّد عليها محور الإحداثيات السينية، ومحور الإحداثيات الصادية، ثم مثل النقاط التالية :

ب (٢+، ٠) ؛ ب (٤+، ٠) ؛ ج (٠، ٣+) ؛
د (٠، ٥-) ؛ هـ (٢+، ٢+) ؛ و (٢+، ٢-) ؛
ز (٢-، ٢+) ؛ ح (٢-، ٢-) ؛ ط (٥-، ٠) ؛
ي (٣+، ٦-) ؛ ك (٥-، ٤+) ؛ ل (٥+، ١-)

٣) حدّد في المستوى الديكارتي صـ × صـ، النقاط الممثلة للأزواج المرتبة (س، ص)، حيث : $٠ \leq س$ و $٠ \leq ص$
بمجموعة هذه النقاط تسمّى الربع الأول من صـ × صـ.

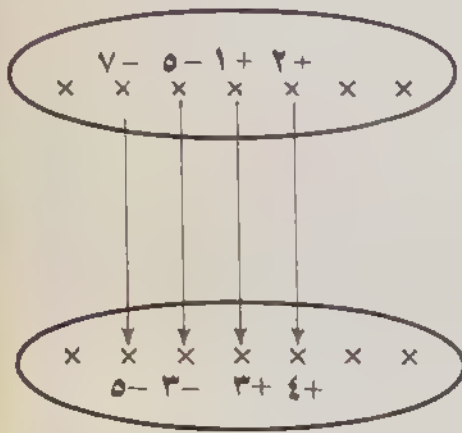
٤) كما في التمرين ٣، حدّد على التوالي النقاط الممثلة للأزواج المرتبة (س، ص)، حيث :
أ - س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠
ب - س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
ج - س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠
بمجموعة هذه النقاط تسمّى على التوالي :
الربع الثاني من صـ × صـ، الربع الثالث من صـ × صـ، الربع الرابع من صـ × صـ.

٥) في المستوى الديكارتي صـ × صـ.
أ - عيّن النقاط : ب (٥+، ٣+) ؛ ب (٤+، ٥-) ؛
ج (٥-، ٦+) ؛ د (٣-، ٣-).
ب - حدّد المحورين الذي أصل كل منهما النقطة ن
(٤+، ٣+)، والموازيين للمحورين الأساسيين، ولهما المنحى نفسه ووحدة الطول نفسها.
حدّد إحداثيات النقاط : (ب، ج، د) بالنسبة لهذين المحورين الجديدتين.

الدرس الثالث : تمثيل العلاقات العددية

(١) ماهية العلاقات العددية

■ على الشكل (١) جزء من تمثيل علاقة من صورة نحو صورة بواسطة الرسم السهمي.



شكل (١)

ما هي صورة $7-$ بهذه العلاقة؟

ما هي صورة $1+$ بهذه العلاقة؟

ما هي صورة $2+$ بهذه العلاقة؟

ما هي صورة العدد الصحيح س بهذه العلاقة؟

املأ الفراغ فيما يلي ، علمًا بأن ص هي صورة س بهذه العلاقة :

ص = س +

عناصر مجال العلاقة في المثال السابق هي أعداد صحيحة، وكذلك بالنسبة

لعناصر المجال المقابل للعلاقة.

نقول في هذه الحال : إن العلاقة هي علاقة عددية في صورة.

كل علاقة مجالها جزء من مجموعة الأعداد الصحيحة
نـ، ومجالها المقابل جزء من المجموعة نفسها، تسمى
علاقة عددية في صورة.

لاحظت في النشاط السابق أنه إذا كان العدد ص صورة العدد س

بالعلاقة المعروفة ، فإن :

$$ص = س + ٢$$

نقول : إن الجملة « $ص = س + ٢$ » هي معادلة العلاقة العددية السابقة.

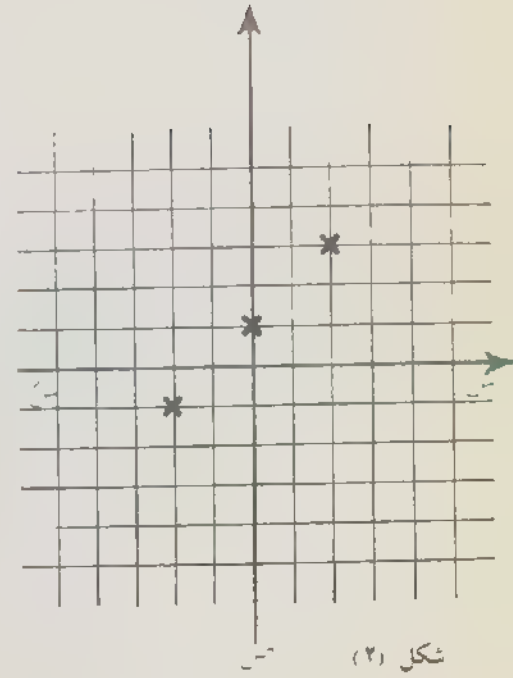
(٢) تمثيل علاقة عددية في المستوى الديكارتي

حدّدنا العلاقة العددية في $ص = س + ٢$ التي معادلتها هي :

$$ص = س + ١$$

■ أكمل الجدول التالي علماً بأن (س، ص) هو زوج مرتّب من الأزواج التي تحدّد العلاقة :

س	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣	-٤
ص									



شكل (٢)

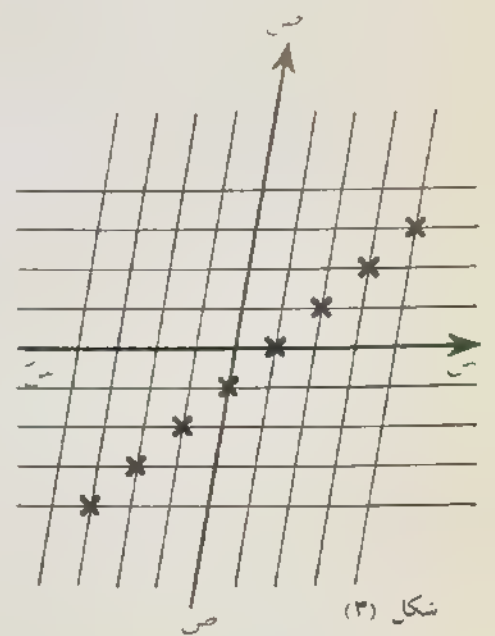
على الشكل (٢)، مثلنا الأزواج المرتبة : $(١, ٣)$ ، $(٢, ٤)$ ، $(٣, ٥)$ ، $(٤, ٦)$ في المستوى الديكارتي $ص \times س$. مثل أزواجاً مرتبة أخرى من بين الأزواج التي تحدّد العلاقة.

في النشاط السابق مثلنا العلاقة العددية التي معادلتها : $ص = س + ١$ في المستوى الديكارتي $ص \times س$.

(٣) تفسير علاقة عددية من تمثيلها في المستوى الديكارتي

■ الشكل (٣) يمثل المستوى الديكارتي $ص \times س$ ، وقد ميّزنا على الشبكة نقاطاً تمثل علاقة عددية في $ص = س$.

ارسم جدولاً على الشكل التالي، علماً بأن (س، ص) هو زوج من الأزواج المرتبة التي تحدّد العلاقة :

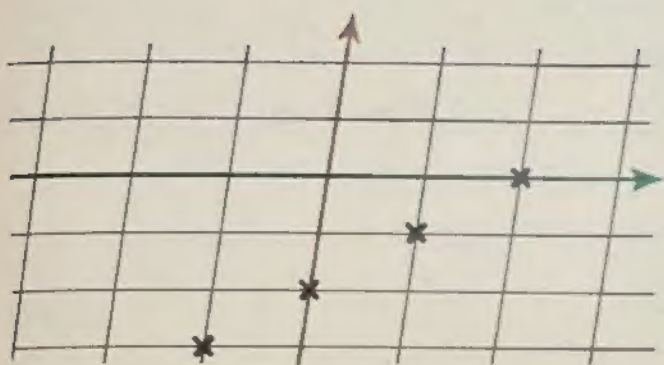


شكل (٣)

تمارين

(١) مثل العلاقات العددية في صورة ، والتي معادلاتها :

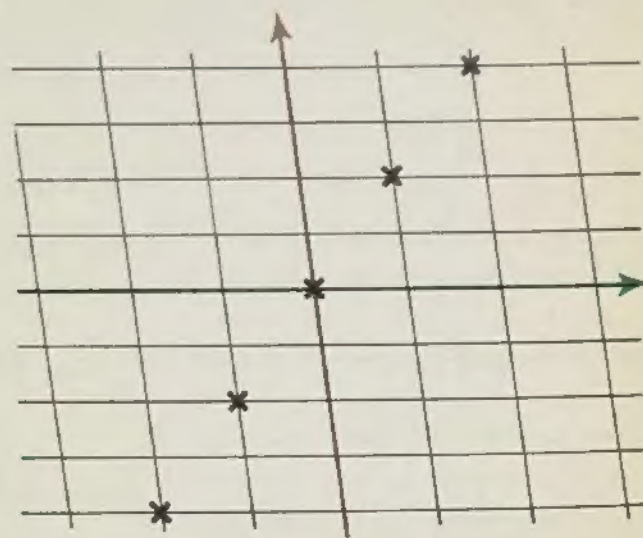
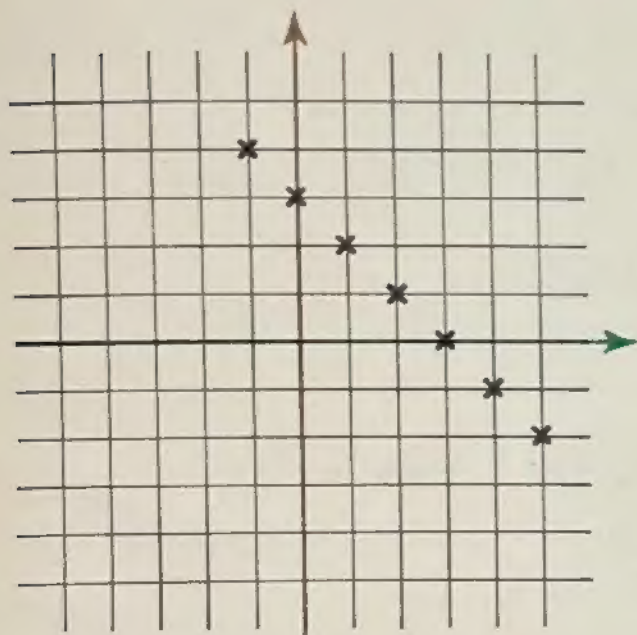
$$\begin{aligned} \text{ص} &= 3\text{س} & \text{ص} &= 2\text{س} \\ \text{ص} &= \text{س} & \text{ص} &= \text{س} - 1 \end{aligned}$$



(٢) مثل العلاقات العددية في صورة ، والتي معادلاتها :

$$\begin{aligned} \text{ص} &= 3\text{س} - 2 & \text{ص} &= 2\text{س} + 1 \\ \text{ص} &= 3\text{س} - 1 & \text{ص} &= 2\text{س} + 1 \\ \text{ص} &= 3\text{س} - 2 & \text{ص} &= 2\text{س} + 1 \end{aligned}$$

(٣) جد معادلات العلاقات العددية الممثلة على الأشكال التالية :



٤) على شبكة تربيع متعامدة نظيمة ، اخترنا محورين ومثلنا في المستوى الديكارتي $V \times V$ الحاصل ، العلاقتين المعروفتين بمعادلتيهما :

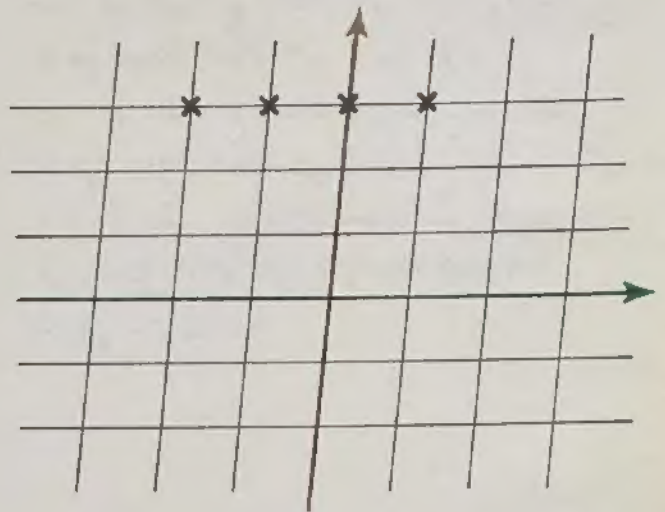
$$V = S \quad \text{و} \quad V = -S$$

أ - مثل هاتين العلاقتين .

ب - مجموعة النقاط الممثلة للعلاقة $V = S$ هي على مستقيم θ ب .

كيف هو المستقيم θ بالنسبة للمستقيمين S و S ؟

ج - مجموعة النقاط الممثلة للعلاقة $V = -S$ هي على مستقيم جد . كيف هو المستقيم جد بالنسبة للمستقيمين S و S ؟



٥) مثلنا على الشكل السابق علاقة عددية في V .

أ - جد إحداثيات النقاط المعينة .

ب - عين ثلاث نقاط أخرى من تمثيل العلاقة نفسها .

ج - ما هي قيمة V ، إذا كان (S, V) أحد الأزواج المرتبة التي تحدّد هذه العلاقة ؟

٦) مثل العلاقات العددية المعرفة كما يلي :

أ - أيّا كان S ، فإن $V = 4 + S$

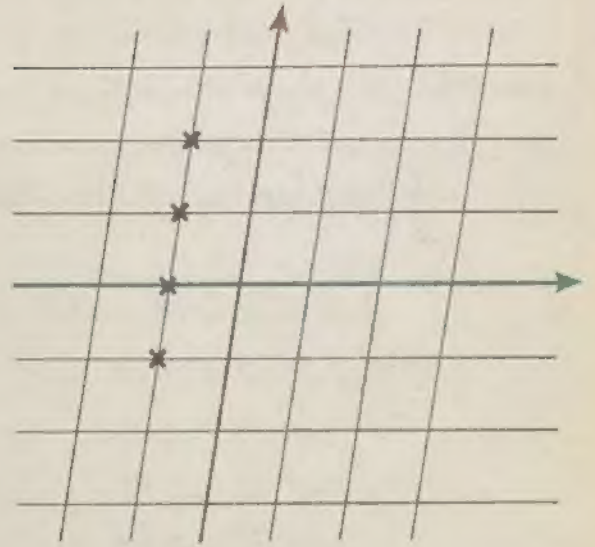
ب - أيّا كان S ، فإن $V = 3 - S$

ج - أيّا كان S ، فإن $V = 1 - S$

د - أيّا كان S ، فإن $V = 1$

ما هي خاصية المستقيمت التي تنتمي إليها مجموعة النقاط الممثلة للعلاقات السابقة ؟

(٧) على الشكل ادناه مثلنا علاقة عددية في صه .



(٨) مثل العلاقات العددية المعرفة كما يلي :

أ - أيا كان ص، فإن $ص + ٢ =$

ب - أيا كان ص، فإن $ص - ٤ =$

ج - أيا كان ص، فإن $ص + ٥ =$

د - أيا كان ص، فإن $ص = ٠$

ما هي خاصية المستقيمت التي تنتمي إليها مجموعة النقاط الممثلة للعلاقات السابقة؟

(٩)

أ - في المستوى الديكارتي صه × صه، حيث المحوران متعامدان، وحيث طول الوحدة هو نفسه على المحورين، مثل العلاقة العددية التي معادلتها :

$$ص = ص + ٢$$

سم ع ؛ مجموعة النقاط التي تمثل العلاقة .

ب - عين نظير ع بالتناظر حول ص ص وسمه ع . ما هي معادلة العلاقة التي تمثلها ع .

ج - عين نظير ع بالتناظر حول ص ص، وسمها ع . ما هي معادلة العلاقة التي تمثلها ع ؟

د - عين نظير ع بالتناظر حول أصل المحورين م . ما هي معادلة العلاقة التي يمثلها هذا النظير؟ ما هي ملاحظاتك؟

أ - جد إحداثيات النقاط المعينة .

ب - عين ثلاث نقاط أخرى من تمثيل العلاقة نفسها .

ج - ما هي قيمة ص، إذا كان (ص، ص) أحد الأزواج المرتبة التي تحدّد هذه العلاقة؟

المدرسة:

الإسم:

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ ١